

Medie, baricentri e matrici

Un problema tra il classico e il moderno

Federico Poloni

PhD student, Scuola Normale Superiore, Pisa

Bergamo, 30 Gennaio 2008

Altri concetti di media

k reali positivi a_1, \dots, a_k

Media aritmetica

$$AM(a_1, \dots, a_k) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

Esempio

Tre oggetti pesano 300 g, 400 g, 800 g. Altri tre oggetti uguali tra loro hanno lo stesso peso complessivo, quanto pesano?

Altri concetti di media

Media armonica

$$HM(a_1, \dots, a_k) = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}}$$

Esempio

L'auto A fa tre giri di pista, uno a 30 km/h, uno a 40 km/h, uno a 80 km/h. L'auto B fa tre giri di pista, tutti e tre alla stessa velocità, e ci impiega lo stesso tempo di A. Qual è questa velocità?

Altri concetti di media

Media geometrica

$$GM(a_1, \dots, a_k) = \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

Esempio

Una scatola ha lati 3 cm, 4 cm, 8 cm. Un'altra scatola, cubica, ha lo stesso volume. Qual è il suo lato?

Esempio

Sui miei risparmi, ottengo un anno l'interesse del 3%, un anno del 4%, un anno dell'8%. A quale tasso di interesse (costante) avrei dovuto investirli per ricavare la stessa somma dopo tre anni?

Cosa ci aspettiamo da una media?

- simmetrica: $M(a, b, c) = M(b, a, c) = \dots$
- omogenea: $M(ka, kb, kc) = kM(a, b, c)$
- compresa tra min e max:
 $\min(a, b, c) \leq M(a, b, c) \leq \max(a, b, c)$
- monotona: $b' \geq b \Rightarrow M(a, b', c) \geq M(a, b, c)$

ed altro...

Disuguaglianze

Non usatele per le medie di fine quadrimestre. . .

Teorema

Per ogni k -upla di reali positivi,

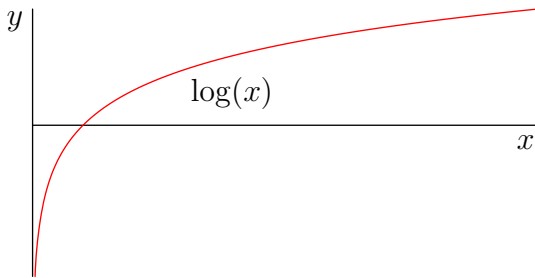
$$HM \leq GM \leq AM$$

Altra interpretazione della media geometrica

Passo ai logaritmi + media aritmetica:

$$\log(GM) = \frac{\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_k)}{k}$$

In molti contesti, lavorando con numeri positivi ha senso passare prima ai logaritmi: il “bordo” scompare. . .

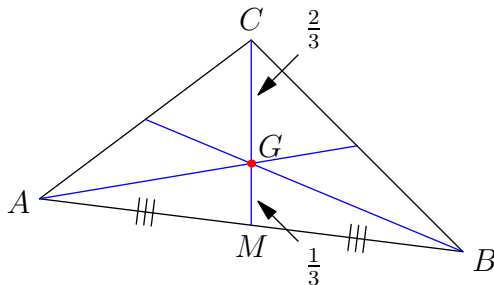


Il baricentro

Definizioni

Mediana di un triangolo = segmento che unisce il punto medio di un lato al vertice opposto

Baricentro = punto di incontro delle mediane (che si incontrano!)



Teorema

Le mediane si incontrano (nel baricentro) a $\frac{2}{3}$ della loro lunghezza

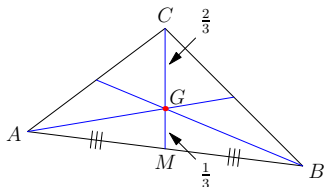
Dimostrazione

Teorema

Le mediane si incontrano (nel baricentro) a $2/3$ della loro lunghezza

Sorprendentemente semplice con geometria analitica!

Sulla mediana CM , costruiamo un "candidato G " che stia alla lunghezza giusta della mediana...



$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\
 x_G &= \frac{2}{3}x_M + \frac{1}{3}x_C \\
 &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)
 \end{aligned}$$

L'espressione è simmetrica in A, B, C : allora se rifaccio la costruzione su un altro lato, finisco nello stesso punto. \square

Proprietà di minimo del baricentro

Teorema

Il baricentro è il punto P per cui è minima $AP^2 + BP^2 + CP^2$ (somma dei quadrati delle distanze dai vertici).

Di nuovo semplice con geometria analitica:

$$\begin{aligned}AP^2 + BP^2 + CP^2 &= \\&= (x_P - x_A)^2 + (x_P - x_B)^2 + (x_P - x_C)^2 + \dots \\&= 3x_P^2 - 2x_P(x_A + x_B + x_C) + (x_A^2 + x_B^2 + x_C^2) + \dots\end{aligned}$$

parabola, ha minimo in $x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

Matrici

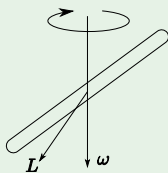
Matrice = “tabella” piena di numeri

$$M = \begin{bmatrix} 0.460 & 0.470 & 0.890 \\ 0.944 & 0.849 & 0.715 \\ 0.090 & 0.946 & 0.686 \end{bmatrix}$$

Alcune quantità fisiche si esprimono naturalmente come matrici (**tensori**).

Esempio

Tensore d'inerzia: velocità angolare \mapsto momento angolare



$$L = \mathbf{I}\omega$$

$$E = \frac{1}{2}\mathbf{I}\omega^2$$

Media geometrica tra due matrici

Ipotesi tecnica

Lavoriamo con matrici *simmetriche* e *positive definite* (SPD): es.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & -1 \\ 1.5 & 5 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema: come “mediare” diversi dati sperimentali?

Come definire la media di due matrici?

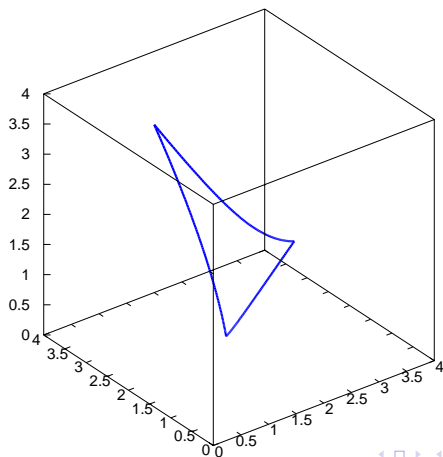
- $M(A, B) = (AB)^{1/2}$ oppure $A^{1/2}B^{1/2}$: **no!** $AB \neq BA$
- $M(A, B) = \exp\left(\frac{\log A + \log B}{2}\right)$: **no!** non monotona

... sorprendentemente, $M(A, B) = A(A^{-1}B)^{1/2}$ funziona

Matrici e geometria

Possiamo definire una “geometria” sulle matrici simmetriche, positive definite.

Basta dire quanto costa spostarsi in una direzione. . .



Geometria e medie

Possiamo fare le stesse costruzioni della geometria piana, ma molti teoremi **non valgono più**

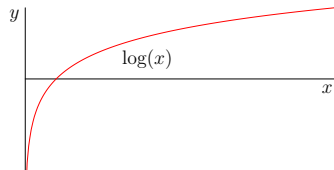
Qual è il rapporto tra questa geometria e le medie di matrici?

Teorema

L'equazione del segmento (**geodetica**) che congiunge A e B è $\gamma(t) = A(A^{-1}B)^t$, $t \in [0, 1]$.

La media geometrica tra due matrici è il **punto medio** di AB .

[Come mai non la media aritmetica?
Per lavorare con le matrici SPD,
costruzione simile al passare ai
logaritmi. . .]



Media di più matrici

Problema

Come definire una “buona” media geometrica di tre o più matrici?
Le formule più semplici non funzionano. . .

Idea:

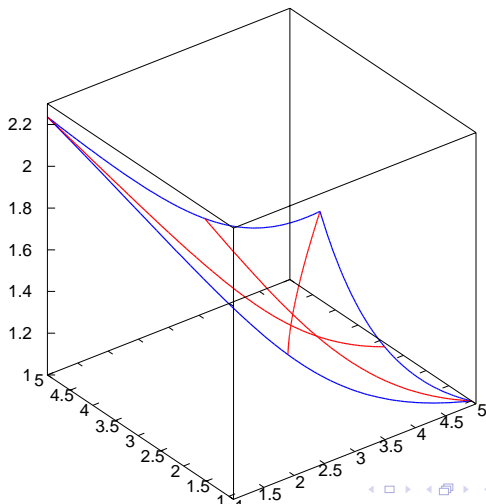
Due matrici: punto medio del segmento

Tre matrici: **baricentro** del triangolo

(nella nuova geometria)

Problema

Le mediane non si incontrano!



Soluzione I: proprietà di minimo del baricentro

Dalla geometria euclidea...

Teorema

Il baricentro è il punto P per cui è minima $AP^2 + BP^2 + CP^2$ (somma dei quadrati delle distanze dai vertici).

Definizione

La media geometrica di più matrici A_1, A_2, \dots, A_k è **definita** come la matrice P per cui è minima

$$[d(A_1, P)]^2 + [d(A_2, P)]^2 + \dots + [d(A_k, P)]^2$$

dove $d(\cdot, \cdot)$ è la distanza nella nuova geometria

Soluzione I: proprietà di minimo del baricentro

Definizione

La media geometrica di più matrici A_1, A_2, \dots, A_k è **definita** come la matrice P per cui è minima

$$[d(A_1, P)]^2 + [d(A_2, P)]^2 + \dots + [d(A_k, P)]^2$$

Proprietà:

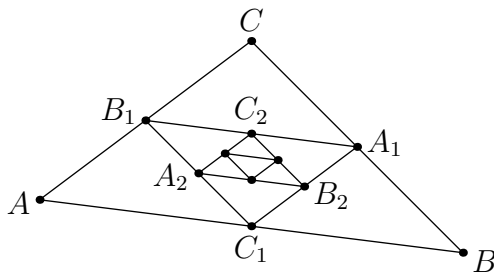
- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa molte delle proprietà che cercavamo (ma non tutte...)
- **come si calcola?** Non facile...

Soluzione II: iterazione

Con $M(X, Y) =$ punto medio tra X e Y , definiamo

$$\begin{array}{ll} A_1 = M(B, C) & A_2 = M(B_1, C_1) \\ B_1 = M(C, A) & B_2 = M(C_1, A_1) \quad \dots \\ C_1 = M(A, B) & C_2 = M(A_1, B_1) \end{array}$$

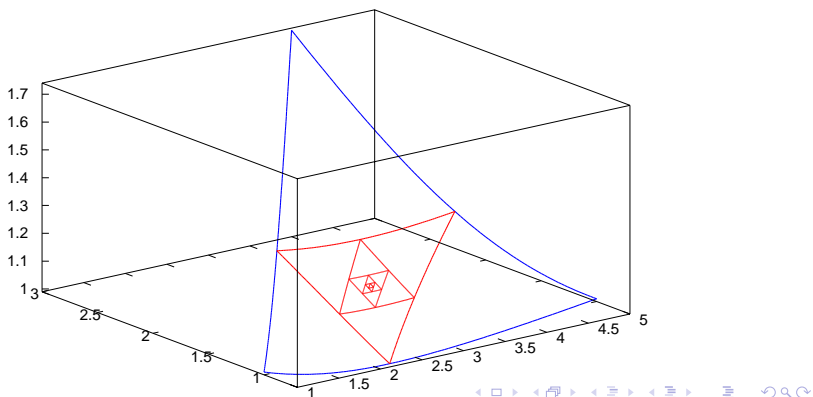
Nel piano (geometria Euclidea), converge al baricentro



Soluzione II: iterazione

Teorema

Anche nella geometria delle matrici A_i , B_i , C_i convergono a uno stesso punto. Lo **definiamo** media geometrica dei tre punti



Soluzione II: iterazione

Definizione

Anche nella geometria delle matrici A_i, B_i, C_i convergono a uno stesso punto. Lo **definiamo** media geometrica dei tre punti

Proprietà:

- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa **tutte** le proprietà che cercavamo
- generalizzabile a più di tre matrici: $A_{k+1} = M(B_k, C_k, \dots)$
- come si calcola? Facile: direttamente dalla definizione, ma...
- **problema**: servono molte iterazioni, calcolo laborioso

Soluzione III: altra iterazione

Dalla geometria euclidea...

Teorema

Le mediane si incontrano (nel baricentro) a $2/3$ della loro lunghezza

Non ha senso per le matrici: le mediane non si incontrano!

Ricordiamo la dimostrazione del teorema:

- consideriamo i tre punti a $2/3$ delle mediane
- con geometria analitica, coincidono (per simmetria dell'espressione)

Soluzione III: altra iterazione

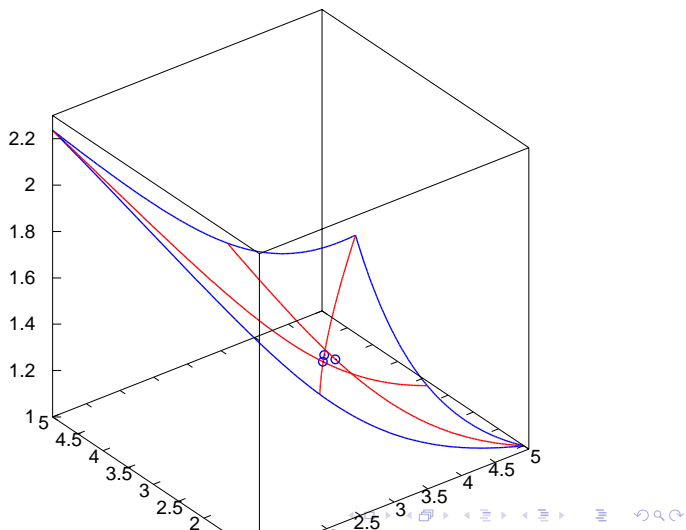
Definiamo $A_1, B_1, C_1 =$ i punti a $2/3$ delle mediane di ABC
(**diversi tra loro** in generale)

A_2, B_2, C_2 definiti nello stesso modo a partire da $A_1B_1C_1$ e così via

Teorema

A_i, B_i, C_i convergono a uno stesso punto. Lo **definiamo** media di A, B, C

Soluzione III: altra iterazione



Soluzione III: altra iterazione

Proprietà:

- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa **tutte** le proprietà che cercavamo
- generalizzabile a più di tre matrici
- come si calcola? Facile: direttamente dalla definizione
- **molto più veloce** da calcolare della precedente: l'iterazione converge più in fretta

Qualche numero

5

1.92542947898189

2.90969918536362

2.35774114351751

2.61639158463414

2.48316587472793

2.54876054375880

2.51571460655576

2.53217471946628

2.52392903948587

2.52804796243998

2.52598752310721

2.52701749813482

2.52650244948321

2.52675995852183

2.52663120018107

2.52669557839604

2.52666338904971

2.52667948366316

2.52667143634151

5

2.59890269690271

2.53027293208879

2.53025171828977

2.53025171828977

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A sinistra: soluzione II: Punti medi dei lati

A destra: soluzione III: $\frac{2}{3}$ delle mediane

Altri spunti ...

Geometria euclidea:

Teorema (retta di Eulero)

In un triangolo, il baricentro G sta a $1/3$ del segmento OH , dove O è il circocentro e H è l'ortocentro.

Geometria delle matrici: chi sono il **circocentro** (punto d'incontro degli assi) e l'**ortocentro** (punto d'incontro delle altezze)?

Non è per nulla chiaro...

Altri spunti ...

Sia $M(X, Y, r)$ il punto che sta a una frazione r della “strada” tra X e Y (in modo che $M(X, Y, 0) = X$ e $M(X, Y, 1) = Y$)

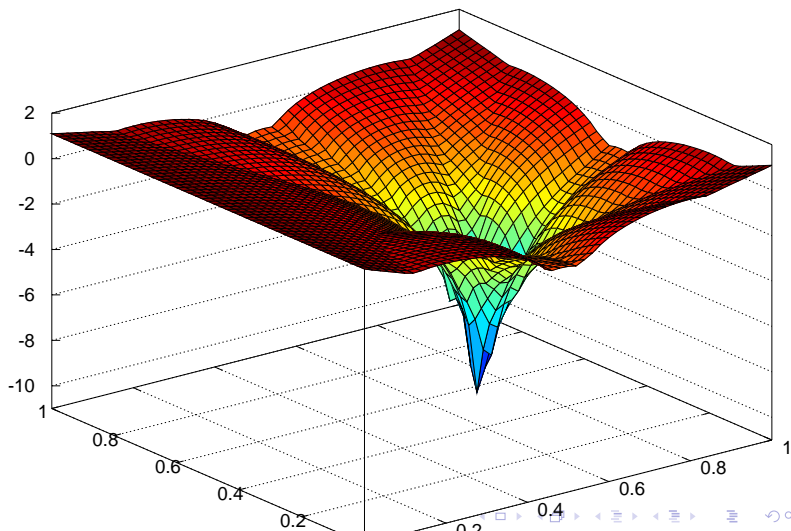
- Soluzione II: $A_{nuovo} = M(A, M(B, C, \frac{1}{2}), 1)$
- Soluzione III: $A_{nuovo} = M(A, M(B, C, \frac{1}{2}), \frac{2}{3})$

Se prendo due parametri s, t ,

$$A_{nuovo} = M(A, M(B, C, s), t)$$

Chi sono gli s e t “migliori”?

Altri spunti ...



Grazie dell'attenzione!