

# Laboratorio di Analisi Numerica

## Lezione 5

Gianna Del Corso <delcorso@di.unipi.it>

Federico Poloni <fpoloni@di.unipi.it>

30 Ottobre 2012

**Quantità di esercizi:** in questa dispensa ci sono *più esercizi* di quanti uno studente medio riesce a farne durante una lezione di laboratorio, specialmente tenendo conto anche degli esercizi facoltativi. Questo è perché sono pensate per “tenere impegnati” per tutta la lezione anche quegli studenti che già hanno un solido background di programmazione. Quindi fate gli esercizi che riuscite, partendo da quelli *non* segnati come facoltativi, e non preoccupatevi se non li finite tutti!

### 1 Fattorizzazione LU

Ricordate come funziona il passo  $k$ -esimo di fattorizzazione LU:

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(k)} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{33}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{43}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{53}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{63}^{(k)} & * & * & * \end{pmatrix}$$

dovete moltiplicare  $A^{(k)}$  per una matrice  $L^{(k)}$  della forma indicata in modo che gli elementi in posizione  $(k+1, k)$ ,  $(k+2, k)$ ,  $\dots$ ,  $(n, k)$  diventino zero. La matrice  $L$  è il prodotto delle matrici  $(L^{(k)})^{-1}$ , che non va calcolato a mano ma si può determinare senza calcoli ulteriori...

*Esercizio 1.* Scrivete una **function** `[L,U]=my_lu(A)` che calcoli la fattorizzazione LU di una matrice  $A$ .

```
octave:47> M=4*eye(5)+ones(5,5)
```

```
M =
```

```
5 1 1 1 1
```

```

1 5 1 1 1
1 1 5 1 1
1 1 1 5 1
1 1 1 1 5

octave:48> [L,U]=my_lu(M)
octave:49> L*U-M
ans =

Columns 1 through 3:

0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00 -8.88178419700125e-16
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00 2.22044604925031e-16
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00 2.22044604925031e-16

Columns 4 and 5:

0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00
0.000000000000000e+00 0.000000000000000e+00
0.000000000000000e+00 2.22044604925031e-16
2.22044604925031e-16 0.000000000000000e+00

```

Perché qui sopra non avete degli zeri esatti?

*Esercizio 2.* Scrivete una **function** `x=sys_solve(A,b)` che risolva un sistema lineare generico utilizzando la fattorizzazione LU, `inf_solve` e `sup_solve`.

Potete utilizzare le funzioni della volta scorsa per risolvere sistemi triangolari, oppure copiate e incollate le seguenti.

```

function x=inf_solve(L,b)
%risolve un sistema con L triangolare inferiore
s=size(L);
n=s(1);
x=b; %x "vettore di accumulatori"
for i=1:n
    x(i)=x(i)/L(i,i);
    x(i+1:n)=x(i+1:n) - L(i+1:n,i)*x(i);
endfor
endfunction

```

```

function x=sup_solve(U,b)
%risolve un sistema con U triangolare superiore
s=size(U);

```

```

n=s(1);
x=b; %x "vettore di accumulatori"
for i=n:-1:1
    x(i)=x(i)/U(i,i);
    x(1:i-1)=x(1:i-1) - U(1:i-1,i)*x(i);
endfor
endfunction

```

*Esercizio 3* (facoltativo). Capite come funziona questa versione di `inf_solve` e `sup_solve`. Notate che i calcoli che esegue non sono identici alla versione della scorsa lezione! Ricordate che la formula è

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} L_{ij}x_j}{L_{ii}}, \quad x = 1 \dots n.$$

## 2 Esperimenti numerici

*Esercizio 4.* Testare i seguenti metodi di soluzione di un sistema lineare  $Ax = b$ :

- La funzione `sys_solve` appena scritta
- Il comando di Octave `x=inv(A)*b`, che calcola la matrice inversa e la moltiplica per  $b$ .
- Il comando di Octave `x=A\b`: il comando `\` (barra rovesciata) serve proprio per risolvere sistemi lineari, ed è basato sulla fattorizzazione LU con pivoting parziale (che vedrete la volta prossima a lezione), più stabile della semplice fattorizzazione LU.

Per testarli, utilizzate le seguenti matrici:

- La matrice `M1=9*eye(10)+ones(10)`, che è dominante diagonale.
- Una matrice generata da `M2=rand(10)`, con elementi casuali — può essere abbastanza mal condizionata! Potete controllare il condizionamento con il comando `cond(M2)`.
- La matrice data da `M3=M1;M3(9,1:9)=0`, che ha una riga quasi tutta di zeri che rende la sottomatrice principale  $9 \times 9$  singolare (e quindi non ammette fattorizzazione LU).
- La matrice data da `M4=M2;M4(9,1:9)=sum(M4(1:8,1:9))`:

```

* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

```

gli elementi in rosso sono ognuno la somma degli otto elementi che stanno direttamente sopra di esso; quindi la sottomatrice principale  $9 \times 9$  è singolare (ma lavorando con i numeri floating point...).

- La matrice data da `M5=M2;M5(10,1:10)=sum(M5(1:9,1:10))`: l'ultima riga è la somma delle 9 precedenti, quindi la matrice è singolare (ma lavorando con i numeri floating point...).
- La matrice di Hilbert `hilb(10)`. Riuscite a spiegare il numero di cifre significative ottenute in base al suo numero di condizionamento, che potete calcolare con `cond(hilb(10))`?

Ponete `v=transpose(1:10)` (vettore contenente i numeri da 1 a 10 in ordine); per ognuna di queste matrici, calcolate `bi=Mi*v` (per  $i = 1, \dots, 6$ ), e andate a risolvere il sistema  $M_i*x=bi$ . La soluzione esatta di questo sistema è  $v$ ; di quanto si discostano le soluzioni calcolate?

*Esercizio 5 (facoltativo).* Guardate la fattorizzazione LU di M4.  $U(9,9)$  è molto piccolo; perché?  $U(10,10)$  è molto grande; perché?

*Esercizio 6.* Prendete

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quanto vale la matrice  $A=L*U$ ? La matrice  $A$  soddisfa le ipotesi sufficienti del teorema visto a lezione per l'esistenza della fattorizzazione LU? Che risultato ritorna la vostra routine `my_lu(A)` su questa matrice?

### 3 Facoltativo: eliminazione di Gauss “senza $L$ ”

Si possono riorganizzare i calcoli in modo che il calcolo di  $L$  venga effettuato implicitamente; questo probabilmente è equivalente a come avete visto l'eliminazione di Gauss lo scorso anno ad algebra lineare. Lavoriamo sulle equazioni anziché sulle matrici:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Cerchiamo di eliminare  $x_1$  dalla seconda e terza equazione:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) &= b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1. \end{aligned}$$

Quindi reiteriamo, fino a trasformare  $A$  in una matrice triangolare.

Prendiamo come riferimento per l'analisi il primo passo. Come vengono modificati quindi la matrice dei coefficienti ( $A$ ) e il termine noto ( $b$ ) che stiamo tenendo in memoria? Sulla matrice  $A$  facciamo le stesse operazioni che abbiamo fatto la scorsa lezione nel calcolo della fattorizzazione LU. Come abbiamo visto, la quantità che dobbiamo sottrarre ad  $A$  è una matrice di rango 1:

$$A(2:3,1:3) = A(2:3,1:3) - \begin{bmatrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} * [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$$

In più, dobbiamo effettuare un calcolo simile anche su  $b$ :

$$b(2:3) = b(2:3) - \begin{bmatrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} * b_1$$

Possiamo anche interpretare i calcoli effettuati in termini di prodotti di matrici: nel calcolo della fattorizzazione LU ottenevamo  $L^{-1}$  come prodotto di matrici parziali  $L_n L_{n-1} \cdots L_1$ , ognuna della forma

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & 1 & \\ & v & I \end{bmatrix},$$

ora quello che facciamo è effettuare subito il prodotto con la matrice parziale

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in modo da trasformare il sistema nel sistema equivalente (che ha la stessa soluzione)

$$L_1 A x = L_1 b,$$

Al termine degli  $n$  passi, abbiamo trasformato il sistema in un sistema equivalente ma con matrice dei coefficienti triangolare, e questo lo sappiamo risolvere.

*Esercizio 7* (facoltativo). Scrivere un `function` `x=sys_solve2(A,b)` che risolva un sistema lineare con il metodo qui sopra.

## 4 Facoltativo: soluzione di un sistema lineare con fattorizzazione QR implicita (Householder)

Una trasformazione di Householder è una matrice ortogonale della forma  $H_v = I - \frac{2vv^T}{\|v\|_2^2}$ .

Fissato  $x$ , esiste una scelta di  $v$  che determina una  $H_v$  che “porta”  $x$  in un multiplo di  $e_1$ , ed è

$$x \pm \|x\|_2 e_1$$

In particolare,  $v$  è uguale a  $x$  tranne per il primo elemento, che vale

$$v_1 = x_1 - \|x\|_2 = \frac{-(x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{x_1 + \|x\|_2}$$

oppure

$$v_1 = x_1 + \|x\|_2 = \frac{-(x_2^2 + \dots + x_n^2)}{x_1 - \|x\|_2}.$$

In una di queste, il denominatore soffre di errori di cancellazione; quale? (dipende dal segno di  $x_1 \dots$ )

*Esercizio 8* (facoltativo). Scrivete una funzione `v=householder_vector(x)` che calcoli  $v$  con il segno giusto.

*Esercizio 9* (facoltativo). Scrivete una funzione `function x=qr_solve(A,b)` che risolva un sistema lineare in modo simile a `sys_solve2` ma attraverso la fattorizzazione QR: per esempio, al primo passo, invece di trovare una matrice triangolare  $L_1$  che mandi la prima riga di  $A$  in un multiplo di  $e_1$  (come facevate in `sys_solve2`), dovete trovare una matrice di Householder  $H_1$  che faccia lo stesso lavoro e applicarla sia a  $A$  che a  $b$  per ottenere un sistema equivalente:

$$H_1 A x = H_1 b.$$

*Esercizio 10* (facoltativo). Cosa succede se usate il segno sbagliato nella funzione `householder_vector`, o se usate sempre lo stesso segno? Testare provando a risolvere qualche sistema lineare.