

3° Compitino di MD - corso B
A.A. 2014/15 – 9 aprile 2015

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Sia $f : (\mathbb{Z}_7)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^3$ l'applicazione lineare definita da $f(v) = Av$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Determinare una base del nucleo di f .
- Determinare una base dell'immagine di f .

Esercizio 2. Si consideri in \mathbb{R}^4 il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Verificare che V ha dimensione 2 ed estendere $\{v_1, v_2\}$ ad una base di \mathbb{R}^4 (cioè trovare v_3, v_4 tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di \mathbb{R}^4).
- b) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker } T = \text{Im } T = V$? Se non esiste spiegare il motivo, se esiste scegliere una base dello spazio \mathbb{R}^4 (in partenza e in arrivo) e scrivere una matrice che rappresenta tale applicazione rispetto alla base scelta.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 descritto nell'esercizio precedente. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Trovare una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

