“Arnesi” per risolvere le equazioni funzionali

Federico Poloni

13 luglio 2004

Due parole di introduzione. . .

La base di questa dispensa viene dagli appunti presi durante una lezione che seguii in occasione di uno *stage* delle Olimpiadi della Matematica a Pisa. La lezione era tenuta da Camillo De Lellis, (uno dei coautori del libro dei problemi delle Olimpiadi Italiane, oggi professore a Zurigo): mi era rimasta particolarmente impressa per il tono “pratico” e il focus sulle *idee standard* da seguire nella risoluzione dei problemi olimpici. L’ho trovata utilissima, e perciò ho pensato di riproporne i contenuti (per quel poco che me ne ricordo a questa distanza di tempo: circa un paio d’anni. . .) ampliandola fino a farla diventare una breve dispensa sulle equazioni funzionali.

1 Cos’è un’equazione funzionale?

1.1 Cos’è una funzione?

Per prima cosa è opportuno stabilire che cos’è una *funzione*. In generale, con funzione non si intende solo il risultato di una particolare formula (per esempio $f(x) = 2x^3 + 1$):

> una funzione da un insieme A a un insieme B è *un modo qualunque* di associare a ogni elemento di A *uno ed un solo* elemento di B.

Possiamo definire una funzione proprio “per punti”: per esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ una funzione perfettamente legittima è

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Insiemisticamente, possiamo pensare a una funzione come a tante “frecce” che partono ognuna da un elemento di A e vanno a raggiungere degli elementi di B (non necessariamente tutti, non necessariamente una volta sola).

Possiamo dire, per dare una definizione più precisa, che una funzione *è il suo grafico*: cioè, è l’insieme delle coppie (x, y) tali che $y = f(x)$. Si tratta di un insieme di coppie assai particolare, perché per ogni x_0 nel primo insieme esiste una e una sola coppia del tipo (x_0, y_0) per un qualche y_0.

Su insiemi più complessi come per esempio i numeri reali possono succedere cose molto "peggiori": per esempio, una biblioteca di funzioni più o meno "patologiche" (che comunque sono funzioni a tutti gli effetti!) può essere: (XXX: fare disegni!)

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad \text{cioè} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 1 \\ 20x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases} \qquad \textit{(funzione di Cantor)} \tag{3}$$

$$f(x) = \text{la funzione inversa di } 3x + \log x \text{ (che esiste perché } 3x + \log x \text{ è sempre crescente)} \tag{4}$$

$$f(x) = \text{parte intera di x} \tag{5}$$

o anche cose più fantasiose, come questa funzione definita su $\mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} -1 & \text{se il nome del numero } n \text{ (in italiano) finisce con la lettera i} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In generale, sono funzioni molte più cose di quelle che uno si aspetterebbe. In particolare, non tutti i grafici di funzioni si ottengono "tracciando una linea su un foglio": per esempio la (3) non ha un grafico molto visualizzabile! L'unico vincolo che deve rispettare una funzione è quello di assegnare a ogni valore nell'insieme di partenza *uno e un solo* valore nell'insieme di arrivo: quindi per esempio

$$f(t) = \text{la soluzione di } x^2 + tx + 1$$

non è una funzione, perché per la maggior parte dei punti assume due valori (oppure nessun valore, se il discriminante è negativo). Per lo stesso motivo una circonferenza non può essere il grafico di una funzione.

1.2 dominio e codominio

Il *dominio* è l'insieme "di partenza" di una funzione; il *codominio* è l'insieme "di arrivo" di una funzione. Solitamente si "dichiara" una funzione esibendo il suo dominio e il suo codominio: ad esempio,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$$

è una funzione che prende numeri reali (cioè ha dominio $\mathbb{R}$) e restituisce numeri naturali[1] (cioè ha codominio $\mathbb{N}$): per esempio potrebbe essere la funzione "valore assoluto della parte intera di x".

Notate che dichiarare $\mathbb{R}$ come dominio significa che la funzione deve essere definita su *tutti* i numeri reali: se dovessimo dichiarare una funzione come $\frac{1}{x}$,

[1] Per noi, seguendo la convenzione più diffusa, si converrà che $0 \in \mathbb{N}$: quindi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Per indicare l'insieme $\mathbb{N}$ privo dello zero diremo "gli interi positivi". Nel caso, ricordo ancora una volta che 0 *non è positivo*.

che non è definita nello zero, dovremmo scrivere

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{7}$$

e analogamente $\log x$ è una funzione che (al massimo) ha dominio $\mathbb{R}^+$ (l'insieme dei reali positivi)[2].

Perché "al massimo"? Perché nulla ci vieta di considerare una funzione solo su un insieme più ridotto, per esempio $\log x$ nell'intervallo $(0, 1)$ (estremi esclusi!). In questo caso si dice che *restringiamo* la funzione $f(x) = \log x$ al dominio $(0, 1)$.

Anche sul codominio è necessario fare qualche precisazione: in realtà, si mette di solito come codominio un insieme "di comodo", cioè, per esempio, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$, anche se poi non tutti gli elementi vengono raggiunti dalla funzione: per esempio, la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{8}$$

$$f(x) = x^2 \tag{9}$$

"raggiunge" solo lo zero e i numeri positivi; tuttavia possiamo indicare tranquillamente $\mathbb{R}$ come codominio. Infatti, nella definizione di funzione, sta scritto solo che da ogni elemento dell'insieme di partenza deve "partire una freccia", ma non sta scritto come queste frecce debbano arrivare nell'insieme di arrivo.

Solitamente si chiama *immagine di f* l'insieme dei valori del codominio che vengono effettivamente raggiunti dalla funzione. Per esempio, l'immagine della funzione $f(x) = x^2$ è $\{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

1.3 Iniettività e suriettività

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice *iniettiva* se per ogni coppia di valori $x \neq y$ in A, $f(x) \neq f(y)$. Nell'interpretazione insiemistica come frecce, questo significa che "due frecce non arrivano mai nello stesso elemento di B".

Una funzione si dice *suriettiva* (o *surgettiva*) se raggiunge tutti i valori di B, cioè se ha per immagine l'intero codominio. Nell'interpretazione insiemistica, "in ogni punto di B arriva almeno una freccia". Notiamo che il fatto che una funzione sia suriettiva o meno dipende anche da come la "dichiariamo", ossia qual è il suo codominio "ufficiale". Per esempio, $f(x) = x^2$ non è suriettiva se vista come $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ma lo diventa se la vediamo come $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\} \cup \mathbb{R}^+$. In generale è ovvio che *se restringiamo* [3] *il codominio alla sua immagine, ogni funzione diventa suriettiva.*

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ iniettiva e suriettiva si dice *biiettiva* o *bigettiva*. Le funzioni biiettive ammettono una funzione inversa, cioè una funzione $g : B \longrightarrow A$ tale che

$$f(g(y)) = y \text{ per ogni } y \text{ in } B, \quad \text{e} \quad g(f(x)) = x \text{ per ogni } x \text{ in } A$$

[2] Alcuni libri di testo delle superiori cercano di farvi credere che, per esempio $\frac{1}{x}$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che ha dominio $\mathbb{R}$ ma *insieme di definizione* $\mathbb{R} - \{0\}$. Si tratta di una definizione inutile e fuorviante, che matematicamente non ha alcun senso e che infatti non viene utilizzata in nessun altro contesto. Quindi dimenticatevene al più presto.

[3] Qui "restringere" non è usato nel senso di "restringere una funzione" a un certo dominio definito prima, non fate confusione!

Ad esempio la funzione inversa di $2x$ è $\frac{1}{2}x$, e quella di $\frac{1}{x}$ è la stessa $\frac{1}{x}$ (considerate come funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$). [domanda: in quale dominio e codominio possiamo dire che $\sqrt{x}$ è l'inversa di x^2?]. Chiaramente, *se restringiamo il codominio alla sua immagine, ogni funzione iniettiva è invertibile.*

1.4 Composizione di funzioni

Comporre due funzioni (con domini compatibili) significa avere una funzione $f : A \longrightarrow B$ e una funzione $g : B \longrightarrow C$ e applicarle "in successione" per ottenere una nuova funzione da A a C. Questo corrisponde a creare la funzione $x \mapsto g(f(x))$, che viene indicata con il simbolo $g \circ f$. Notate che questo corrisponde ad applicare *prima* f e *poi* g sul nostro elemento x dell'insieme di partenza: la composizione si scrive (solitamente) nell'ordine inverso a quello di applicazione delle funzioni. Per ricordarvi l'ordine esatto, il modo migliore è ricordarsi che $g(f(x))$ significa $g \circ f$ (mantenendo lo stesso ordine).

Così per esempio se $f(x) = \log x$ e $g(y) = y^2 + 5y$ (qui è utile usare due variabili diverse per non confondersi), allora

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\log x)^2 + 5 \log x$$

e

$$(f \circ g)(y) = \log(y^2 + 5y)$$

La composizione (come abbiamo appena visto) non è commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$, salvo casi particolari. Però è associativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, per cui possiamo scrivere senza ambiguità $f \circ g \circ h$.

La composizione di f con sé stessa n volte si indica spesso con $f^n(x)$, da non confondersi con $(f(x))^n$

1.5 Composizione e iniettività/suriettività

Teorema 1 *1. Se una composizione di due funzioni $f \circ g$ è iniettiva, allora g (quella più a destra) è iniettiva.*

2. Se $f \circ g$ è suriettiva, allora f (quella più a sinistra) è suriettiva

Dimostrazione Le due dimostrazioni sono simili; dimostriamo la prima affermazione e lasciamo la seconda al lettore.
Sappiamo che $f \circ g$ è iniettiva e vogliamo provare che g è iniettiva: supponiamo per assurdo che non lo sia, allora esistono a e b tali che $g(a) = g(b)$: ma allora anche $f(g(a)) = f(g(b))$ perché stiamo applicando f sullo stesso numero: ma questo è assurdo perché abbiamo supposto $f \circ g$ iniettiva. $\square$

Il teorema qui sopra si generalizza alla composizione di n funzioni: se la composizione è iniettiva, allora la funzione più interna è iniettiva, mentre se è suriettiva allora quella più esterna è suriettiva.

1.6 Cos'è un'equazione funzionale?

Un'equazione funzionale è un'"equazione che ha per incognita una funzione": si fornisce un'uguaglianza in cui compare una funzione incognita f e si chiede di determinare tutte le funzioni f che la verificano. Esempi di equazioni funzionali sono:

1. Trovare tutte le $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Esistono funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tali che per ogni n naturale

$$3f(n) - 2f(f(n)) = f(n)$$

   ?

3. Trovare almeno una funzione $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ tale che

$$f(xf(y)) = f(x)/y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^+$$

4. Trovare tutte le coppie di funzioni $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tali che:
   (a) $f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$
   (b) g è iniettiva

A priori, le soluzioni alle equazioni funzionali possono essere funzioni di qualunque tipo, anche quelle "patologiche" esposte in precedenza. Tipicamente il lavoro da fare per la soluzione sarà di provare che solo un numero finito di funzioni "buone" e definite da una formula, o comunque una classe ristretta di funzioni, soddisfa l'uguaglianza fornita. Per esempio, l'ultimo esempio qui riportato ha come soluzioni tutte le funzioni del tipo $f(x) = x+h$, $g(x) = x+k$, con k e h costanti intere.

1.7 Come si risolve un'equazione funzionale?

In una parola: ingegnandosi. Non esistono grandi teoremi o risultati cardine sulle equazioni funzionali (con un paio di eccezioni: la soluzione delle equazioni di Cauchy e i semplici risultati del paragrafo 1.5), l'unica cosa da fare è provare a fare manipolazioni algebriche e sostituzioni a partire dal testo dell'esercizio per arrivare a esplicitare la $f(x)$.

Può aiutare provare a cercare soluzioni particolarmente semplici, come le costanti o le funzioni lineari: ad esempio, nell'esempio 1 del paragrafo precedente, abbiamo

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Cerchiamo innanzitutto le soluzioni costanti: se $f(x) \equiv k$, dev'essere $k = k + k$ e quindi $k = 0$. La costante 0 è soluzione.

Se invece proviamo a sostituire la generica funzione lineare $f(t) = at + b$, con a e b costanti da determinare, otteniamo:

$$a(x + y) + b = ax + b + ay + b$$

che è identicamente verificata sse $b = 0$ per qualunque valore di a. Quindi tutte le funzioni del tipo $f(t) = at$ sono soluzioni dell'equazione.

Determinare una o più "soluzioni particolari" può fornire un'idea sulla direzione da prendere, su cosa tentare di dimostrare.

La sezione 2 è interamente dedicata alle euristiche e agli *standard tricks* che permettono di risolvere le più comuni equazioni funzionali.

1.8 Come si scrive la soluzione di un'equazione funzionale?

Che, a priori, è una domanda completamente diversa da *come si risolve un'equazione funzionale*. Una volta "conquistata" la soluzione, essa va esposta con ordine. Suggerisco questo approccio:

1. Enunciare il risultato ottenuto: ad esempio, "Le soluzioni all'equazione sono tutte le funzioni del tipo $\log(ax)$ per a costante reale, più la soluzione costante 1".

2. Verificare che le soluzioni trovate verifichino effettivamente l'equazione funzionale: sì, questo significa sostituire f e svolgere i conti, tutti. Oltre ad essere un'importante verifica per i conti fatti, si tratta di un passaggio che è esplicitamente richiesto in fase di correzione. Saltare questo passaggio è il modo più sicuro per prendere 6 invece di 7 punti in un esercizio risolto. ☺. Tradizionalmente questo passaggio viene messo in fondo alla soluzione, invece che in cima: suggerisco questo posizionamento per evitare dimenticanze.

3. La parte più lunga: esporre, con ordine, le manipolazioni algebriche e le sostituzioni che permettono di ottenere, a partire dall'equazione del testo, la soluzione o le soluzioni. Nelle e.f., molto più che in altri problemi, è opportuno usare diversi step (precisando all'inizio di ognuno cosa si va a dimostrare).

Come ricorda puntualmente il divin Gobbino, nelle formule usate bisogna *presentare tutte le variabili*: una formula del tipo

$$f(nx) = nf(x)$$

non significa nulla, scrivere invece

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e ogni } n \geq 1 \text{ naturale}$$

Stesso trattamento per le costanti introdotte (ad es. $c = f(0)$). È opportuno anche non riciclare la stessa lettera per scopi diversi, ma abbondare in sostituzioni: solitamente (se x e y sono le variabili del testo) è meglio scrivere "Per un qualunque $t \in \mathbb{R}$, pongo $x = t$, $y = -t$" invece di riutilizzare x e scrivere direttamente "ponendo $y = -x \ldots$".

A titolo di esempio, pubblico in appendice una soluzione "scritta ammodino". Nell'esporre gli arnesi, tuttavia, esporrò solo le idee principali senza formalizzare troppo (e magari dimenticando qualche caso). Potete considerare come un esercizio di *solution writing* quello di riscrivere per bene, "in bella copia" le mie soluzioni[4].

1.9 Come si guadagnano uno o due punti su un'equazione funzionale pur non avendola risolta?

Scrivendo tutti i risultati parziali che si ottengono: in particolare, tutti quelli citati nella prossima sezione sugli "arnesi": ci sono buone probabilità di andare a centrare l'inizio della soluzione ufficiale. Citiamo tra questi:

[4] Forse, le soluzioni migliori saranno pubblicate da qualche parte... Sarebbe una cosa utile avere un piccolo "archivio" di soluzioni pubblicate su internet per confrontarle e studiare gli errori, i passi poco chiari e i "punti persi" per le minuzie.

- Le cose banali come “ponendo $x = y = 0$ otteniamo $f(0) = 0$” o “$f(x) = 0$ identicamente è soluzione”
- Claim azzeccati, del tipo “Si vede che $f(x) = x^2$ è soluzione. Congetturo che non ce ne siano altre”
- Iniettività e suriettività
- Soluzioni parziali del tipo “se sapessimo che f è suriettiva, potremmo concludere facilmente in questo modo... (segue dimostrazione)”, “supponendo $f(0) \neq 0$, ci sono solo queste soluzioni”
- Soluzioni su un insieme più piccolo: ad esempio $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ invece di $\mathbb{R}$ (per esempio risolvere un’equazione di Cauchy solo per i razionali, senza verificare una delle “ipotesi bonus”)
- Qualche relazione interessante, magari quelle ricavate per induzione

2 "Arnesi" per risolvere le equazioni funzionali

- **sostituire:** immettere valori particolari delle variabili x e/o y, (tipicamente 0, 1, oppure, se ci sono due variabili, porre $y = x$). Solitamente, la prima cosa che si prova quando ci si trova davanti un'e.f. è porre una variabile uguale a zero[5].

  Un'altra idea furba è di fare sostituzioni che annullino una particolare espressione che compare all'interno dell'equazione, oppure che la rendano uguale a un valore "comodo".

  Esempio 1 *Trovare le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni x, y reali,*

  $$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy \tag{10}$$

  Soluzione: Poniamo $y = 0$: magicamente, la 10 diventa

  $$f(f(x)) = [f(0) + 1]f(x)$$

  Ora, possiamo risostituire nella 10 e ottenere (ponendo $f(0) = c$)

  $$cf(x+y) = f(x)f(y) - xy$$

  che è un primo passo per avvicinarci alla soluzione (che vedremo integralmente più avanti).

  XXX:altri esempi?

- **manipolare:** cioè, fare cambi di variabile e sostituzioni. Durante questa operazione, una volta presa la giusta manualità, si può evitare di introdurre nuove variabili "cambiando il nome" a quelle esistenti: ad esempio, invece di dire "pongo $z = x+1$ e riscrivo l'equazione in termini di z", conviene imparare a dire "pongo $x+1 \mapsto x$" (questo nei tentativi di soluzione e nella brutta copia... Quando si consegna la soluzione è sempre meglio scriverla per bene cercando di essere il più chiari possibile). [È importante però tenere d'occhio anche per quali valori di x vale la nostra equazione: per esempio, se ponessimo $x^2 \mapsto x$ otterremmo un'equazione valida solo per i valori positivi di x (well, la "x" dopo la sostituzione perlomeno... Il difetto di questa notazione è che induce un po' di confusione con i nomi delle variabili!)]

  Esempio 2 *Trovare tutte le $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tali che*

  $$\alpha x^2 f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{x}{x+1} \tag{11}$$

  Soluzione: L'idea è di sfruttare la simmetria tra x e $\frac{1}{x}$: pongo $\frac{1}{x} \mapsto x$ e ottengo

  $$\alpha \frac{1}{x^2} f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x+1} \tag{12}$$

[5] Tipicamente, quando c'è una funzione da R^+ a R^+, prima si prova a sostituire $x = y = 0$ e si fanno i conti, poi ci si accorge che 0 non è nel dominio e quindi quanto appena fatto non funziona. ☺

Ora, da queste due equazioni posso eliminare la $f(\frac{1}{x})$: moltiplico la 12 per αx^2 e la sottraggo membro a membro dalla 11: così si ha

$$(\alpha^2 - 1)f(x) = \frac{\alpha x^2 - x}{x + 1}$$

e quindi (a meno di un paio di valori di α ancora da sistemare, $\alpha = \pm 1$) l'equazione è risolta. [domanda: ci crea problemi il caso $\alpha = 0$?]

- **dare un nome:** alle quantità costanti che compaiono, come per esempio $f(0)$ o $f(1)$. È buona cosa cercare di usare nomi diversi da quelli che si usano solitamente per le variabili, per evitare di confondersi: per esempio a, α, c, k (se la scrivete in modo distinguibile dalla x ☺) sono buoni nomi; z, t e (orrore!) x sono cattivi. Questo è per evitare di scrivere una formula per un valore particolare di t e poi applicarla come se valesse per tutti i valori di t... Una cosa simile può succedere quando fate delle sostituzioni un po' più strane (ad esempio: "sia y quel particolare valore per cui $f(y) = x \ldots$", dopo aver dimostrato che ne esiste uno e uno solo). Vedremo lungo la dispensa (e ne abbiamo già visti...) diversi esempi di utilizzo di questo "arnese".

- **Scrivere la stessa cosa in più modi:** per esempio, se l'e.f. ci fornisce un modo per scrivere $f(a+b)$ in funzione delle $f(a)$ e $f(b)$, allora potremmo pensare di ricavare $f(2)$ come $f(1+1)$, $f(3)$ come $f(2+1)$ e poi confrontare le due scritture per $f(4)$: $f(2+2) = f(3+1)$.

  Continuiamo con la soluzione dell'esempio 1: abbiamo riscritto l'e.f. nella forma

  $$cf(x+y) = f(x)f(y) - xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

  L'idea è di provare a sfruttare la simmetria della funzione per scriverci $f(x+y+z)$ in due modi diversi: prima come $f((x+y)+z)$ e poi come $f(x+(y+z))$. Quindi (applicando la prima volta la (10) con $x \mapsto x+y$, $y \mapsto z$)

  $$\begin{aligned} c^2 f((x+y)) + z) &= c[f(x+y)f(z) - (x+y)z] = \\ &= [f(x)f(y) - xy]f(z) - c(x+y)z = \\ &= f(x)f(y)f(z) - xyf(z) - c(x+y)z \end{aligned}$$

  Se portiamo a sinistra il termine $f(x)f(y)f(z)$, ci accorgiamo che il membro di sinistra è simmetrico in x, y, z e quello di destra no: possiamo quindi dire che il membro di destra resta invariato se scambiamo (per esempio) y con z, perché

  $$\begin{aligned} xyf(z) - c(x+y)z &= c^2 f(x+y+z) - f(x)f(y)f(z) = \\ &= c^2 f(x+z+y) - f(x)f(z)f(y) = xzf(y) - c(x+z)y \end{aligned}$$

  Questo è la generalizzazione di un altro "arnese" che in due variabili torna spesso utile:

  > **Se**
  >
  > $$\left\{ \begin{array}{c} \text{espressione simmetrica} \\ \text{in } x \text{ e } y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{espressione non simmetrica} \\ \text{in } x \text{ e } y \end{array} \right\}$$

allora

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{espressione non simmetrica} \\ \text{in } x \text{ e } y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{la stessa espressione} \\ \text{non simmetrica in } y \text{ e } x \\ \text{(scambiando tra loro } x \text{ e } y) \end{array} \right\}$$

In conclusione abbiamo

$$xyf(z) - c(x+y)z = xzf(y) - c(x+z)y$$

da cui con pochi passaggi algebrici

$$\frac{f(z)+c}{z} = \frac{f(y)+c}{y}$$

per ogni y e z sono diversi da 0. Quindi, la quantità $\frac{f(t)+c}{t}$ è costante, la chiamiamo a, e ne segue che

$$f(t) = at + c$$

per ogni $t \neq 0$. Si verifica sostituendo che questa formula vale anche per $t = 0$, e quindi questo ci dice che tutte le soluzioni della (10) devono essere funzioni lineari. Si può poi verificare (sostituendo $f(x) = ax + c$ nel testo dell'esercizio) per quali valori di a e c l'equazione è soddisfatta. [XXX: farlo!]

Notiamo per inciso che abbiamo usato un altro "trucchetto standard" che si applica in molti casi:

Se per ogni x**,** y

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{espressione} \\ \text{contenente solo } x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{espressione} \\ \text{contenente solo } y \end{array} \right\}$$

allora

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{espressione} \\ \text{contenente solo } x \end{array} \right\} = \text{costante}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{espressione} \\ \text{contenente solo } y \end{array} \right\} = \text{costante}$$

- **riconoscere e sfruttare iniettività e suriettività:** Per ricavare l'iniettività o la suriettività di una funzione, il mezzo più comune sono i teoremi della sezione 1.5: se per esempio abbiamo un'uguaglianza del tipo

  $$g([f(x)]^2 - 37f(x)) = x^3 + 3f(0)$$

  possiamo pensare il membro di sinistra come $(g \circ h \circ f)(x)$, dove h è la funzione che manda t in $t^2 - 37t$. Quindi, per i teoremini appena ricordati, e poiché $x^3 + 3f(0)$ è iniettiva e suriettiva, ricaviamo che:

  - g (la funzione più esterna) è suriettiva
  - f (la più interna) è iniettiva

L'iniettività di una funzione si sfrutta solitamente "semplificando la f": se f è iniettiva, ci si riconduce a un'uguaglianza del tipo

$$f(\text{qualcosa}) = f(\text{qualcos'altro})$$

e da questa (usando l'iniettività di f) si deduce immediatamente

$$\text{qualcosa} = \text{qualcos'altro}$$

La suriettività invece si sfrutta in modi più oscuri: per esempio, si può fare una sostituzione del tipo "sia y quel valore tale che $f(y) = x \ldots$" (un tale valore esiste sicuramente se f è suriettiva). In questo modo si può passare da un'uguaglianza del tipo $f(f(x)) = 2f(x)$ (abbastanza comune) a $f(y) = 2y$.

Esempio 3 *Trovare tutte le coppie di funzioni $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tali che:*

1. $f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$
2. *g è iniettiva*

Soluzione: L'idea della soluzione sarà di "portare all'esterno" g in modo da poter usare l'iniettività: per questo cerchiamo un espressione per f che "porti fuori" g: Poniamo $x = 0$ per ottenere

$$f(g(0) + y) = g(f(y)) \quad \forall y \tag{13}$$

Ora "trasliamo" y ponendo $y \mapsto y - g(0)$ (e poniamo $g(0) = a$, per brevità)

$$f(y) = g(f(y - a)) \tag{14}$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza e abbiamo

$$g(f(y) + x) = f(g(x) + y) = g(f(g(x) + y - a))$$

ora possiamo sfruttare l'iniettività e eliminare la g più esterna da entrambi i lati:

$$f(y) + x = f(g(x) + y - a)$$

di nuovo trasliamo la y ($y \mapsto y + a$)) per semplificare l'espressione:

$$f(y + a) + x = f(g(x + y))$$

Fissiamo $y = 0$ nell'espressione precedente:

$$x + f(a) = f(g(x)) \tag{15}$$

che è una relazione molto interessante: da sola, ci dice che f è suriettiva (vedi la sezione 1.5: $f(a)$ è una costante, quindi $x + f(a)$ è biiettiva).

Sapendo che f è suriettiva, dalla (14) ricaviamo immediatamente che lo è anche g: g è iniettiva e suriettiva, quindi è invertibile. Poi, sapendo che la g è invertibile, ricaviamo (domanda: in che modo?) dalla (15) che lo è anche la f.

Riprendiamo con la soluzione: possiamo ora sfruttare l'espressione di $f(g(x))$ trovata in (15) sostituendola in altre relazioni: "procuriamoci" un $f(g(x))$, ad esempio, ponendo nel testo $y = 0$ per ottenere $f(g(x)) = g(f(0) + x)$: così,

$$x + f(a) = f(g(x)) = g(f(0) + x)$$

e quindi, ritraslando opportunamente ($x \mapsto x - f(0)$)

$$g(x) = x + f(a) - f(0)$$

Detto $k = f(a) - f(0)$, abbiamo allora $g(x) = x + k$, e a questo punto anche la f si ricava facilmente: le soluzioni [concludere e verificare!] sono tutte le coppie di funzioni del tipo

$$\begin{cases} f(x) = x + h \\ g(x) = x + k \end{cases}$$

con h e k interi.

- **generalizzare attraverso l'induzione le formule trovate:** ad esempio, "costruire" $f(n+1)$ in funzione di $f(n)$, o in generale considerare anche formule più complesse.

  Esempio 4 *Determinare tutte le $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tali che*

  $$3f(x) - 2f(f(x)) = x$$

  Soluzione: Giocando un po' con i termini arriviamo alla formula

  $$2[f(x) - f(f(x))] = x - f(x)$$

  Se poniamo $x \mapsto f(x)$ e riapplichiamo l'identità trovata, possiamo ottenere

  $$x - f(x) = 2[f(x) - f^2(x)] = 4[f^2(x) - f^3(x)]$$

  A questo punto è chiaro che si può continuare così e dimostrare per induzione che

  $$x - f(x) = 2^n[f^n(x) - f^{n+1}(x)]$$

  Ma in questo modo (poiché i termini del tipo $f^n(x) - f^{n+1}(x)$ sono sempre interi) otteniamo che $x - f(x)$ contiene infinite volte il fattore 2: dev'essere quindi $f(x) = x$. La relazione trovata vale per ogni x (non abbiamo posto restrizioni sul valore di x, e la composizione di f con sé stessa è sempre lecita), quindi l'unica soluzione dell'equazione è $f(x) = x$.

- **ricondursi alle equazioni di Cauchy:** (Parleremo più diffusamente delle equazioni di Cauchy nella prossima sezione). Spesso, quando non ci sono termini al di fuori dei simboli di funzione, come negli esempi che seguiranno, ricondursi alle equazioni di Cauchy è l'unica strada praticabile. [fa eccezione l'esempio 3, per cui avevamo in più l'informazione che g fosse iniettiva, che ci permetteva di "tirare fuori" espressioni dai simboli di funzione]

Esempio 5 *Trovare tutte le $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x + y^2) = f(x) + [f(y)]^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Soluzione: Poniamo $x = 0$ e otteniamo $f(y^2) = [f(y)]^2$, da cui ricaviamo subito che f deve mandare reali non negativi in reali non negativi. Inoltre, risostituendo quest'ultima uguaglianza, arriviamo alla forma

$$f(x + y^2) = f(x) + f(y^2)$$

che possiamo riscrivere, ponendo $z = y^2$, come

$$f(x + z) = f(x) + f(z) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall z \geq 0$$

[attenzione alla condizione su z!] Fortunatamente questa condizione non è restrittiva, perché nella soluzione all'equazione di Cauchy abbiamo lavorato innanzitutto sui reali positivi. Possiamo dimostrare esattamente come nell'equazione di Cauchy che $f(x) = ax$ sui reali positivi e poi estendere ai negativi ponendo $x = -z$ (da cui $f(-z) = -f(z)$). Per fare questo però abbiamo bisogno di sapere che f soddisfa una delle "ipotesi bonus": in questo caso riusciamo a dimostrare la crescenza: se $a < b$, allora possiamo scrivere $b = a + t^2$ per un qualche $t > 0$: sostituendo $x = a$, $y = t$ nell'equazione di partenza otteniamo

$$f(b) = f(a + t^2) = f(a) + [f(t)]^2 \geq f(a)$$

Esempio 6 (IMO2002/5) *Trovare tutte le $f : \mathbb{R}arr\mathbb{R}$ tali che*

$$(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$$

per ogni $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

Soluzione: Cominciamo col cercare le soluzioni costanti e otteniamo $f(x) = \frac{1}{2}$ e $f(x) = 0$. Poi, il solutore esperto si accorgerà subito che questa è una generalizzazione della nota identità

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$$

e quindi $f(x) = x^2$ è un'altra soluzione.

Poiché non abbiamo termini al di fuori dei segni di funzione, possiamo congetturare già da subito che per risolvere l'equazione dovremo ricondurci a qualche equazione di Cauchy. Abbiamo qui un'abbondanza di termini che possiamo porre uguali a zero: in particolare possiamo fare in modo da annullare i termini $xu - yv$ e $xv + yu$. Il primissimo tentativo è $x = y = u = v = 0$, che ci dà $f(0) = 0$ o $f(0) = \frac{1}{2}$. Possiamo raffinarlo un po': dopo varie prove arriviamo a $x = y$, $u = v = 0$ che ci dà

$$4f(x)f(0) = 2f(0)$$

da cui: o $f(0) = 0$ o $f(x) = \frac{1}{2}$ per ogni x, che è una delle soluzioni che avevamo identificato.

Ora, cerchiamo di arrivare a una delle equazioni di Cauchy: ponendo $y = v = 0$ abbiamo

$$f(x)f(u) = f(xu) \tag{16}$$

Bingo: ora abbiamo solo bisogno di un'"ipotesi bonus". Continuiamo a cercare sostituzioni che ci annullino un termine nel membro di destra: stavolta poniamo $x = v = a$, $y = u = b$ e abbiamo

$$[f(a) + f(b)]^2 = f(a^2 + b^2)$$

da cui potremmo cercare di ricavare informazioni sulla crescenza (i quadrati sono $\geq 0\ldots$). Se $x \geq a^2$, allora possiamo scrivere $x = a^2 + b^2$ e quindi

$$f(a^2 + b^2) = f(a^2) + f(2ab) + f(b^2) \tag{17}$$

(qui abbiamo usato la moltiplicatività data dalla (16) per portare fuori un po' di simboli di funzione: ad esempio, $[f(a)]^2 = f(a^2)$).

Ora, se $f(2ab) + f(b^2)$ fosse positivo, saremmo a posto. Ma possiamo ricavare che f manda numeri non negativi in numeri non negativi così: dalla (16), per ogni $x \geq 0$

$$f(x) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0$$

per cui, nella (17), scegliamo a e b dello stesso segno e abbiamo che $f(a^2 + b^2) \geq f(a^2)$: quindi la f è crescente sui numeri positivi. Abbiamo verificato l'ipotesi aggiuntiva delle equazioni di Cauchy, quindi sappiamo che tutte le soluzioni (sui positivi) dovranno essere della forma

$$f(x) = x^a \quad \text{oppure} \quad f(x) = 0$$

Ora, però, non è detto che tutte le funzioni di questa forma siano soluzioni [perché?]: infatti, ponendo $a = b$ nella (17) otteniamo

$$f(2a^2) = (2f(a))^2$$

da cui, giostrando con la moltiplicatività,

$$f(2)f(a^2) = 4f(a^2)$$

Ne segue che (se f non è zero ovunque) dev'essere $f(2) = 4$ e quindi l'unico esponente ammissibile è $a = 2$. Sempre per il teorema sulla forma delle soluzioni dell'equazione di Cauchy (vedi sezione 3.3), dev'essere allora $f(x) = x^2$ ovunque o $f(x) = x^2$ sui positivi e $-x^2$ sui negativi. Vediamo però (ad esempio provando con $x = u = v = 1$, $y = -1$) che quest'ultima non è soluzione.

In conclusione, le uniche soluzioni sono $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$.

3 Equazioni di Cauchy

3.1 Equazioni di Cauchy I

Le equazioni di Cauchy sono l'unico elemento di "teoria avanzata" attinente alle equazioni funzionali.

È detta equazione di Cauchy l'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \tag{18}$$

Nell'appendice A dimostriamo che le $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ che risolvono questa equazione sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = ax$ per un qualche a nell'insieme di definizione[6]. Purtroppo lo stesso risultato non vale se l'equazione funzionale va risolta per funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Si può infatti dimostrare che esistono funzioni "brutte" che risolvono la (18) pur non essendo della forma richiesta (cioè, sono del tipo $f(x) = ax$ sui razionali, ma assumono valori diversi sugli irrazionali). La dimostrazione purtroppo non è molto "olimpica", usa concetti più avanzati; cercherò di presentarne una versione elementare nell'appendice B

Per concludere che la f è del tipo $f(x) = ax$ per tutti i reali bisogna verificare una qualche ipotesi aggiuntiva. In particolare, è sufficiente una delle seguenti:

- Monotonia[7]
- Locale limitatezza: cioè, esiste un intervallo $[a, b]$ in cui $|f(x)| < M$ per ogni x nell'intervallo.
- Continuità (o derivabilità)

Nei problemi di tipo olimpiadi[8], la più frequentemente usata è di gran lunga la crescenza. Continuità e derivabilità sono "vietate" alle IMO (sono argomenti di analisi).

Sull'Engel (A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer) trovate una dimostrazione del fatto che ognuna di queste "ipotesi bonus" basta per arrivare alla conclusione. Qui presentiamo solo quella della crescenza.

> Partiamo dall'ipotesi che $f(q) = aq$ per ogni q razionale, e che f sia crescente (il caso f decrescente è analogo). Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq ax$ per un certo x reale. Allora, detto $y = f(x)/a$, prendiamo un razionale r compreso tra x e y, su cui sappiamo che $f(r) = ar$. Abbiamo due casi:
>
> 1. $x < r < y$: allora $x < r$ ma $f(x) = ay > ar = f(r)$, che è in contraddizione con l'ipotesi della crescenza
> 2. $y < r < x$: allora, analogamente, abbiamo $r < x$ ma $f(r) > f(x)$.
>
> In entrambi i casi siamo arrivati a un assurdo; quindi l'ipotesi fatta che esistesse x tale che $f(x) \neq ax$ è falsa.
>
> Se f è decrescente, possiamo applicare questo stesso ragionamento a $g(x) = -f(x)$.

[6] O anche $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, quello che conta qui è l'insieme di partenza

[7] Ricordiamo che una funzione si dice *crescente* se per ogni $x < y$ $f(x) \leq f(y)$; si dice *decrescente* se per ogni $x < y$ $f(x) \geq f(y)$; Si dice infine *monotona* se è crescente o decrescente. In particolare, e^x e $\log x$ sono crescenti.

[8] Dove le equazioni di Cauchy possono comparire solo nel preIMO e alle IMO, come del resto la maggior parte delle equazioni funzionali

Tipicamente, tra le varie "ipotesi bonus", la crescenza è quella più facile da verificare (vedi esempi 5 e 6).

3.2 Equazioni di Cauchy II

Si possono ricondurre all'equazione di Cauchy diverse equazioni funzionali simili ad essa: tra queste, quelle più notevoli sono quelle che cambiano le somme in prodotti, che vengono chiamate a loro volta "equazioni di Cauchy":

- $f(xy) = f(x) + f(y)$ (per $x, y > 0$, $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$)
- $f(x + y) = f(x)f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

Il procedimento, una volta capita l'idea è semplice: per il primo caso, ad esempio, poniamo $x \mapsto e^x$ e $y \mapsto e^y$: così otteniamo

$$f(e^{x+y}) = f(e^x) + f(e^y)$$

chiamiamo $g(x) = f(e^x)$: così g soddisfa l'equazione di Cauchy, e perciò (a patto di avere una delle "ipotesi bonus": ne discuteremo in seguito) $f(e^x) = ax$ da cui $f(x) = a \log x$.

Il secondo caso richiede un po' più di lavoro: innanzitutto notiamo che se $f(y) = 0$ per qualche y allora $f(x) = 0$ ovunque. Se invece f non si annulla mai, abbiamo $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = f(\frac{x}{2})^2$ da cui otteniamo che f è sempre positiva. Ora, dobbiamo cercare di trasformare il prodotto al secondo membro in una somma: un modo di farlo è componendo con un logaritmo: prendiamo il log dei due membri e otteniamo

$$\log f(x + y) = \log f(x) + \log f(y)$$

Così, ponendo $g(x) = \log f(x)$ si ha (con un'ipotesi aggiuntiva) che $g(x) = ax$ e quindi $f(x) = e^{ax}$.

Per l'ultima equazione, poniamo di nuovo $x \mapsto e^x$ e $y \mapsto e^y$ e otteniamo

$$f(e^{x+y}) = f(e^x)f(e^y)$$

per cui $g(x) = f(e^x)$ risolve la seconda equazione: quindi (con un'ipotesi aggiuntiva) $f(e^x) = e^{ax}$ (oppure $f(e^x) = 0\dots$). Da questa relazione, ponendo $x \mapsto logx$, otteniamo $f(x) = e^{a \log x} = (e^{\log x})^a = x^a$ (almeno per $x \geq 0$, perché abbiamo fatto intervenire i logaritmi). Si verifica infine che possiamo estendere ai numeri negativi sia ponendo $f(-x) = -f(x)$ che ponendo $f(-x) = f(x)$.

3.3 Ipotesi aggiuntive nelle altre equazioni di Cauchy

Nei passaggi che abbiamo fatto per trasfomare le tre equazioni nell'equazione di Cauchy "base", abbiamo usato solo esponenziali e logaritmi: è semplice verificare (controllando i vari passaggi) che le "ipotesi bonus" di cui abbiamo bisogno restano invariate, perché esponenziali e logaritmi sono funzioni "buone" (crescenti, continue e localmente limitate): ad esempio, per la prima equazione si verifica che se f è crescente anche $g(x) = f(e^x))$ lo è, e quindi siamo nelle ipotesi per applicare la soluzione delle equazioni di Cauchy sui reali.

Ricapitolando, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 2 *Sia f che risolve una delle seguenti quattro equazioni funzionali:*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *(per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

2. $f(xy) = f(x) + f(y)$ *(per $x, y > 0$, $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$)*

3. $f(x + y) = f(x)f(y)$ *(per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

4. $f(xy) = f(x)f(y)$ *(per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

con in più almeno una *delle seguenti ipotesi:*

- *f è monotona*
- *f è continua*
- *f è localmente limitata*

Allora, f è, rispettivamente, della forma:

1. $f(x) = ax$ *per qualche $a \in \mathbb{R}$*

2. $f(x) = a \log x$, *per qualche $a \in \mathbb{R}^+$*

3. $f(x) = a^x$, *per qualche $a \in \mathbb{R}$ (e in particolare anche $f(x) = 0$)*

4. $f(x) = 0$, *oppure* $f(x) = |x|^a$, *oppure* $f(x) = |x|^a$ *per* $x \geq 0$ *e* $f(x) = -|x|^a$ *per* $x < 0$ *(per un qualche $a \in \mathbb{R}$, e in particolare anche $a = 0$ per cui $f(x) = 1$ costantemente)*

Notiamo che senza l'ipotesi aggiuntiva, come per la prima equazione di Cauchy, si può provare che f è del tipo richiesto solo su un insieme più piccolo: per esempio, nel caso 2, solo per valori di x del tipo e^q (con q razionale).

A Una soluzione “da gara”

Cercherò, in questa soluzione, di essere formale e rispettare lo stile da seguire “in gara”.

Esempio 7 (equazione di Cauchy sui razionali) *Trovare tutte le* $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *tali che*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \tag{19}$$

Soluzione:
Proveremo che le soluzioni sono tutte e sole le funzioni della forma $f(x) = kx$, con $k \in \mathbb{Q}$ un razionale qualunque.

Innanzitutto si verifica che tali funzioni risolvono effettivamente la (19), perché

$$k(x+y) = kx + ky$$

Dimostriamo ora che tutte le soluzioni sono in questa forma: sia $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una generica soluzione:

- **Step 1:** $f(0) = 0$
  Sostituendo $x = y = 0$ nella (19) otteniamo $f(0) = f(0) + f(0)$ da cui $f(0) = 0$.

- **Step 2:** $f(-q) = -f(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$
  Sostituendo nella (19) $x = q$, $y = -q$ otteniamo

  $$0 = f(0) = f(q) + f(-q)$$

  cioè $f(-q) = -f(q)$.

  Poniamo ora $k = f(1)$

- **Step 3:** $f(n) = kn \quad \forall n \in N$
  Dimostreremo questo punto per induzione: il passo base è verificato perché $f(0) = 0$ per lo step 1; il passo induttivo $n \to n+1$ si ottiene sostituendo $x = n, y = 1$ nel testo dell'esercizio:

  $$f(n+1) = f(n) + f(1) = kn + k = k(n+1)$$

  come richiesto per l'induzione[9].

- **Step 4:** $nf(x) = f(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Q$
  Lo proveremo per induzione. Il passo base $n = 0$ è ovvio dopo lo step 1 [Achtung: qui è meglio verificare che si può veramente pertire da $n = 0$ e il passo induttivo funziona per $n = 0$ e $n = 1$]. Il passo induttivo si ottiene in questo modo:

  $$f((n+1)x) = f(x+nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$$

  dove la seconda uguaglianza si ottiene ponendo $y = nx$ nel testo dell'esercizio e la terza è data dall'ipotesi induttiva.

[9] Notate che questo passo permette di dimostrare la tesi per le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, e, unitamente allo step 2, anche per le $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Se invece vogliamo andare direttamente a $\mathbb{Q}$, possiamo tranquillamente “inglobare” questo passaggio nel successivo.

- **Step 5:** Tutte le funzioni sono della forma $f(x) = kx$
  Sia $\frac{m}{n}$ (con m e n interi positivi) un qualunque numero razionale positivo: allora, applicando la formula trovata allo step 4 con $x = \frac{m}{n}$ otteniamo

  $$nf(\frac{m}{n}) = f(m)$$

  ma $f(m) = km$ per lo step 3, quindi si ha $f(\frac{m}{n}) = \frac{km}{n}$, come richiesto.

  Se $x = 0$, abbiamo $f(0) = 0$ per lo step 1.

  Se infine $x < 0$, per lo step 2 otteniamo $f(x) = -f(-x) = -(k(-x)) = kx$, visto che $-x$ è positivo e per i razionali positivi abbiamo già stabilito la tesi.

Quindi segue ogni soluzione della (19) è della forma $f(x) = kx$ per $k = f(1)$ razionale, Q.E.D. □

B Costruiamo una soluzione "wild" all'equazione di Cauchy sui reali

Includiamo questa dimostrazione per completezza e per soddisfare la curiosità di chi legge, ma è quanto di meno olimpico esista.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, chiamiamo *combinazione lineare (a coefficienti razionali)* un'espressione del tipo

$$q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$$

dove $x_1, \ldots x_n \in A$, e $q_1, \ldots q_n$ sono razionali non nulli.

Diciamo che un insieme (anche infinito) A di numeri reali è *linearmente indipendente* se non è possibile scrivere 0 come combinazione lineare dei suoi elementi (cioè, se tutte le combinazioni lineari di suoi elementi hanno un valore $\neq 0$).

Così, ad esempio, l'insieme $\{37, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ è linearmente indipendente, mentre $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots\}$ non lo è (infatti, ad esempio, $2\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0$).

Se ho un insieme linearmente indipendente posso cercare di "estenderlo" aggiungendo altri elementi. Chiaramente, però, se A diventa molto grande (per esempio, $A = \{gliirrazionali\}$, alla fine sarà linearmente dipendente (notate che già avere due razionali in A basta perché diventi linearmente dipendente).

Possiamo considerare "intuitivamente vero"[10] che esista un insieme B (che sarà per forza infinito) linearmente indipendente *massimale*, cioè tale che non è possibile aggiungere altri elementi mantenendolo linearmente indipendente. Un tale insieme è detto *base di Hamel*, o più comunemente *base di* $\mathbb{R}$ *su* $\mathbb{Q}$. Notate che B non è per forza unico.

Lemma 1 *Sia B una base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$. Ogni reale x si scrive in un solo modo come combinazione lineare di elementi di B (a meno dell'ordine).*

[10] Se siete appassionati di logica: per dimostrarlo serve il Lemma di Zorn (o l'Assioma di Scelta)

Dimostrazione:
Esistenza: per assurdo: se x non si potesse scrivere come combinazione lineare, allora avremmo che $B\cup\{x\}$ sarebbe un insieme linearmente indipendente, contro la massimalità di B: infatti, data una combinazione lineare in $B\cup\{x\}$, cioè una somma del tipo

$$q_0x + q_1x_1 + \ldots + q_nx_n$$

essa non può mai annullarsi, altrimenti avremmo (se $q_0 \neq 0$) $x = -\frac{q_1}{q_0}x_1 - \ldots - \frac{q_n}{q_0}x_n$, assurdo per come abbiamo scelto x, oppure (se $q_0 = 0$) $q_1x_1+\ldots+q_nx_n = 0$, che è impossibile perché B deve essere linearmente indipendente.
Unicità: ancora per assurdo: se x si scrivesse in due modi diversi, ad esempio

$$x = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n = r_1y_1 + \ldots + r_my_m$$

allora avremmo che

$$q_1x_1 + \ldots + q_nx_n - r_1y_1 - \ldots - r_my_m = 0$$

assurdo perché è una combinazione lineare di elementi di B [al lettore: verificare che se un x_i è uguale a un y_j non è un problema. . .]. $\square$

Ora, scegliamo una funzione qualunque $f(x)$ sugli elementi di B, ed estendiamola a una $\bar{f}$ definita su tutto $\mathbb{R}$ in questo modo: se $x = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n$ è l'unico modo di scrivere x come combinazione lineare di elementi di B, allora

$$\bar{f}(x) = q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n)$$

Ora, la $\bar{f}$ definita in questo modo verifica l'equazione di Cauchy $\bar{f}(x + y) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$: infatti, sia $x = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n$ e $y = r_1y_1 + \ldots + r_mym$: allora possiamo scrivere

$$x + y = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n + r_1y_1 + \ldots + r_mym$$

e questo dev'essere l'unico modo di scrivere $x + y$ come combinazione lineare di elementi di B: quindi, per come è definita f,

$$\bar{f}(x + y) = q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n) + r_1f(y_1) + \ldots + r_mf(y_m) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$$

Ora, è chiaro che se scegliamo f in modo che $\frac{f(x)}{x}$ non sia costante, allora $\bar{f}$ non è una funzione del tipo $f(x) = kx$. $\square$

Indice

1 Cos'è un'equazione funzionale? 1

1.1 Cos'è una funzione? 1

1.2 dominio e codominio 2

1.3 Iniettività e suriettività 3

1.4 Composizione di funzioni 4

1.5 Composizione e iniettività/suriettività 4

1.6 Cos'è un'equazione funzionale? 4

1.7 Come si risolve un'equazione funzionale? 5

1.8 Come si scrive la soluzione di un'equazione funzionale? 6

1.9 Come si guadagnano uno o due punti su un'equazione funzionale pur non avendola risolta? 6

2 "Arnesi" per risolvere le equazioni funzionali 8

3 Equazioni di Cauchy 15

3.1 Equazioni di Cauchy I 15

3.2 Equazioni di Cauchy II 16

3.3 Ipotesi aggiuntive nelle altre equazioni di Cauchy 16

A Una soluzione "da gara" 18

B Costruiamo una soluzione "wild" all'equazione di Cauchy sui reali 19