Piano complesso e trasformazioni

Identifichiamo il piano con $\mathbb{C}$ nel modo usuale, cioè al punto di coordinate (x, y) facciamo corrispondere il complesso $x + iy$. Indicheremo con le lettere maiuscole i punti del piano e con le lettere minuscole corrispondenti i complessi associati.

È evidente dalla forma che essa assume in coordinate cartesiane che la traslazione di un vettore OA corrisponde ad applicare la funzione $a \mapsto z + a$

La rotazione intorno all'origine O corrisponde alla moltiplicazione per un complesso di norma unitaria, $e^{i\phi}$: infatti se (in forma esponenziale) $z = re^{itheta}$,

$$ze^{i\phi} = re^{i\theta}e^{iphi} = re^{i(\theta+\phi)}$$

che è il complesso che ha lo stesso modulo di z ma ha argomento $\theta + \phi$, cioè è ruotato di un angolo[1] ϕ in senso antiorario rispetto a z (intorno all'origine).

Triangoli equilateri

Ci chiediamo: quando tre punti nel piano complesso formano un triangolo equilatero? Supponiamo da principio che uno dei tre punti sia l'origine; allora la condizione equivale a imporre che gli altri due vertici a e b siano l'uno ruotato rispetto all'altro di $\frac{\pi}{3}$. Perciò, vogliamo che

$$a = \omega b \text{ oppure } b = \omega a$$

dove $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ è una radice sesta dell'unità. Perciò:

Risultato 1 *O, A e B formano un triangolo equilatero sse $a = \omega b$ o $a = \omega^5 b$*

($\omega^5 = \omega^{-1}$ perché è una radice sesta dell'unità)

La corrispondente condizione su tre punti generici A, B, C si ricava traslando in modo che C sia l'origine:

Risultato 2 *A, B e C formano un triangolo equilatero sse $a - c = \omega(b - c)$ o $a - c = \omega^5(b - c)$*

Per affrontare il Teorema di Napoleone ci servono ancora un paio di fatti:

Risultato 3 *se A, B, C sono i vertici di un triangolo, il suo baricentro è $\frac{a+b+c}{3}$*

che è evidente scomponendo in coordinate cartesiane (ricordiamo che il baricentro G di un triangolo è dato da $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$)

Inoltre, dal fatto che ω è radice sesta primitiva dell'unità si ricava una condizione su ω: ω è radice del polinomio $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$; deve essere

[1] tutti gli angoli sono in radianti!

una radice del secondo fattore perché altrimenti $x^3 = 1$ (contro l'ipotesi che sia una radice primitiva); però $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, e l'unica radice del primo fattore è -1, quindi, in definitiva, ω deve risolvere $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, ossia

$$\omega^2 = \omega - 1 \tag{1}$$

Teorema di Napoleone

Risultato 4 (Teorema di Napoleone) *Dato un triangolo ABC, se costruiamo sui suoi lati tre triangoli equilateri (esternamente ai lati) allora i (bari)centri dei tre triangoli equilateri formano un triangolo equilatero*

Ordiniamo i vertici a, b e c in senso antiorario Sul piano complesso, siano a, b e c i punti corrispondenti a A, B e C. Il terzo vertice del triangolo equilatero costruito esternamente su BC è $d = c + \omega(b - c)$ (per il risultato 2: ho ω e non ω^5 perché ho ordinato i vertici in senso antiorario); quindi il baricentro del triangolo equilatero costruito su BC è

$$3G_{BC} = \frac{1}{3}\left(b + c + c + \omega(b - c)\right)$$

Analogamente, gli altri due baricentri sono (permutando le lettere)

$$\begin{aligned} 3G_{AB} &= \frac{1}{3}\left(a + 2b + \omega(a - b)\right) \\ 3G_{CA} &= \frac{1}{3}\left(c + 2a + \omega(c - a)\right) \end{aligned}$$

Quindi per dimostrare il teorema basta provare che

$$\omega(G_{BC} - G_{AB}) = G_{CA} - G_{AB} \tag{2}$$

Scriviamo le due quantità separatamente come

$$\begin{aligned} \omega(G_{BC} - G_{AB}) &= \omega(b + 2c + \omega(b - c) - a - 2b - \omega(a - b)) \\ &= a(-\omega - \omega^2) + b(-\omega + 2\omega^2) + c(2\omega - \omega^2) \\ G_CA - G_AB &= c + 2a + \omega(c - a) - a - 2b - \omega(a - b) \\ &= a(1 - 2\omega) + b(-2 + \omega) + c(1 + \omega) \end{aligned}$$

Utilizzando la 1 a questo punto si verifica che i coefficienti di a, b, c nelle due espressioni sono uguali:

$$\begin{aligned} -\omega - \omega^2 &= 1 - 2\omega \\ -\omega + 2\omega^2 &= -2 + \omega \\ 2\omega - \omega^2 &= 1 + \omega \end{aligned}$$

il che prova la 2 e completa la dimostrazione. $\square$