“Syllabus” non ufficiale per le Olimpiadi Italiane di Matematica versione 0.2

Federico Poloni

21 marzo 2004

Questa lista è stata compilata di getto, a mano, ed è sicuramente incompleta e “bacata”; per cui sarò grato a chiunque mi faccia notare errori e/o omissioni (ce ne sono sicuramente una caterva). Inoltre, se qualcuno vuole prendersi la responsabilità di diventare il “mantainer” di questa lista, cioè aggiornarla, modificarla e correggerne gli errori al posto mio, sarò felice di cedergliela. Unico prerequisito, un po' di esperienza nel campo delle Olimpiadi e un epsilon di quella merce introvabile (almeno, per me!) che è la “voglia di lavorare” ☺

Introduzione

XXX: to be (re)written

Ci sono due situazioni che possono capitare ai ragazzi che vengono convocati a Cesenatico per la gara nazionale. Da un lato alcuni, non avendo mai sentito parlare di Olimpiadi prima, vengono colti di sorpresa dalla convocazione e non hanno la minima idea di quali problemi stanno per incontrare e di cosa devono sapere per affrontarli al meglio: cosa devo veramente sapere per affrontare questi problemi? Io, che sono nella classe n-esima, ho già studiato a scuola tutto quello che mi può servire? Devo prepararmi in qualche altro modo?

Dall'altro lato, può capitare a chi fa già parte da tempo della comunità del sito delle Olimpiadi di sentire parlare di teorie e tecniche di problem-solving “avanzato” e di farsi l'idea che per andare a Cesenatico con qualche speranza serva una quantità mastodontica di teoria: la gente qui parla di “disuguaglianza tra le medie” o “di Cauchy-Schwarz” come se fosse una cosa che anche un cinghialetto appena nato sa usare, e io che non la so come mai farò a Cesenatico?

Spesso la risposta, in entrambi i casi, è che per risolvere i problemi di Cesenatico servono molte meno conoscenze di quanto può sembrare (le due disuguaglianze citate, per esempio, non servono praticamente a nulla). O meglio, intendiamoci: niente è *completamente* inutile, sapere qualcosa di più può dare una mano in modi inaspettati, magari per trovare una “soluzione alternativa” ma in ogni caso c'è sempre una “soluzione ufficiale” a cui si può arrivare soltanto con poche conoscenze.

È il ben noto *teorema di esistenza della soluzione alla mia portata*: se mi viene dato il problema X in una gara “alla mia portata”, allora esso ha sicuramente una soluzione abbastanza semplice perché io possa arrivarci con quello che so. Il discorso da tenere a mente è: queste gare cercano di premiare il “trovare l'idea giusta" piuttosto che il bieco studio dei programmi scolastici (orrore!) o dei teoremi e degli argomenti che vengono classificati come "problem-solving". Quindi pensate alle idee, non alle conoscenze!

Ho provato a raccogliere in questo documento tutto quello che, a quanto posso ricostruire, viene *veramente* usato nei problemi delle gare di Cesenatico. Questo documento vuol essere un aiuto per chi vuole prepararsi al meglio per le gare; occhio, però, che il discorso non è "devi assolutamente studiare tutti gli argomenti segnati con (**)". È solo un elenco sparso di cose che sono capitate nelle gare passate, e convengo io stesso che la maggior parte degli argomenti segnati con (**) sono praticamente inutili a questo livello (anche se alcuni sono molto interessanti, potreste volerli studiare per diletto personale!).

Ricordo poi che quanto segue è *assolutamente non-ufficiale*. L'ho compilato sulla base di pochi anni (tre) di esperienza personale. Inoltre, credo che non ci sia neppure bisogno di sottolinearlo, nessuno nel team delle Olimpiadi sta a guardare questo documento per stabilire cosa si può o non si può dare in una gara.

Un'osservazione utile: spesso, più che le bieche conoscenze, aiuta avere un po' di esperienza per conoscere le "idee standard" e le "cose ovvie" da fare quando ci si trova davanti un problema di un certo tipo: saper raccogliere i suggerimenti nascosti nel testo, sapere da che parte comincia un problem-solver ben skillato a risolvere i problemi di un certo tipo... A questo scopo, le "12 idee che stanno alla base del problem-solving" a cui il Larson (XXX:cite!) dedica il primo capitolo sono veramente illuminanti (le riportano, brevemente, anche le dispense di Massimo Gobbino (XXX:cite) nelle pagine iniziali). Perciò, se volete allenarvi, in questo campo l'esperienza, l'esercizio e l'analisi *cum grano salis* dei problemi risolti (e non) aiutano molto più che l'accumulare in memoria teoremi "avanzati" che vi serviranno a ben poco.

Un'ultima idea buttata lì: provate a risolvere qualche problema tenendo sottomano questa lista e provando ad applicare, uno per volta, in ordine, tutti i punti che sono segnati. Probabilmente cadranno al primo colpo, senza dover pensare cose strane, molti degli esercizi che avete di fronte!

1 Livello 1: $\leq$ Cesenatico e pre-Cesenatico

Qui ci sono argomenti e teoremi che vengono utilizzati (vel dati per conosciuti) nelle gare da Cesenatico in giù.

Gli argomenti senza stelline o con una stellina sola dovrebbero essere tutte (o quasi) cose insegnate nei primi due anni delle superiori. (se nessuno ve le ha insegnate, potete andare a lamentarvi con il vostro professore di matematica ☺)

Sono segnati con (*) alcuni argomenti "extra" che capitano solo in rari problemi. Sono segnati con (**) alcuni argomenti "ancora più extra" che solitamente *non* sono considerati fatti noti (anzi, spesso alcuni problemi vengono scartati perché "per fare questo bisogna sapere per forza X") ma che in alcuni casi (nei problemi di Cesenatico con numero più alto, i primi sono *sempre e assolutamente elementari*) possono dare una mano. Dubito che argomenti segnati con (**) servano prima di Cesenatico.

1.1 Algebra

- Saper applicare le relazioni algebriche date per ipotesi nei casi particolari più “utili”.
- Avere una discreta manualità nello svolgere i conti senza perdersi

- 0 non è un numero positivo!
- Formula per la somma dei primi k numeri interi. Formule per la somma di progressioni aritmetiche e geometriche.
- Proprietà elementari delle potenze (ad es. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

- Saper fattorizzare e raccogliere a fattor comune alcuni semplici casi di polinomi
- Scomposizioni notevoli: $(a^n \pm b^n)/(a \pm b)$
- Potenze di un binomio, binomio di Newton e triangolo di Tartaglia (aka triangolo di Fermat).
- Quadrato di un trinomio.
- Grado di un polinomio (e suo comportamento rispetto alle operazioni)
- Manipolazione di polinomi. Divisione tra polinomi. Regola di Ruffini (se $p(a) = 0$, $x - a$ divide $p(x)$)
- Relazioni tra radici e coefficienti di un polinomio (aka Formule di Viète)
- (**)Principio di identità dei polinomi (se due polinomi di grado $\leq n$ assumono lo stesso valore in $n + 1$ punti, allora hanno gli stessi coefficienti) (XXX: va incluso veramente?)

- Saper impostare e risolvere sistemini di (dis)equazioni di 1° grado
- Saper risolvere *in modo furbo* sistemini di equazioni di 1° grado
- Saper impostare e risolvere equazioni e disequazioni di 2° grado. Formulazza risolutiva per le equazioni di 2° grado
- (*)Saper risolvere sistemi simmetrici di 2 equazioni in 2 incognite (del tipo $x + y = a,\ xy = b$)

- Valore assoluto: definizione, comportamento, alcuni utilizzi. Disuguaglianza triangolare (nel senso algebrico del termine)

- : Disuguaglianze: comportamento di una disuguaglianza rispetto alle operazioni; impostare semplici “catene di disuguaglianze”
- Disuguaglianze: un quadrato è maggiore di 0. (*)Segno del trinomio di secondo grado e discriminante

- (**)Derivate di polinomi e funzioni elementari; calcolo “a cannonate” di massimi e minimi attraverso le derivate

1.2 Aritmetica

- Tutta l'algebra della sezione precedente ☺

- Idea intuitiva di "rappresentazione in base" (se un numero si scrive in base-10 come abc, allora è $100a + 10b + c$)
- Conticini con i razionali; passare dalla rappresentazione con virgola a quella come frazione e viceversa

- Definizione di "numero primo". 1 non è un numero primo!
- Calcolo della fattorizzazione di numeri interi
- Divisione con resto
- Criteri di divisibilità: $2, 3, 4, 5, 9, 10, 11$.
- Proprietà della divisibilità: se d divide a e b, allora divide ka, $a + b$, $a - b$. Se d divide tutti i termini di un'equazione del tipo $x + y + z = t$ tranne uno, allora divide anche l'ultimo.
- massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Definizione e calcolo

- Regolette sulle operazioni con numeri pari e dispari (ad es. $P \times D = P$)
- Comportamento (a livello intuitivo!) dell'ultima cifra rispetto alle operazioni (i.e. congruenze modulo 10!)
- (**)Concetto e uso elementare delle congruenze con somme e prodotti

1.3 Geometria

- Unica cosa veramente importante: capire qual è la linea giusta da tracciare! ☺

- "Angle-chasing" e "segment-chasing" elementare (segnare angoli e segmenti uguali su una figura, calcolare e segnare l'ampiezza degli angoli...)
- Fatticini utili per l'angle-chasing: somma angoli interni di un tr. $= 180°$; un triangolo è isoscele sse ha due angoli uguali, relazioni tra gli angoli staccati da due parallele, angoli adiacenti e opposti al vertice
- Conticini coi segmenti (se chiamo questo a e quest'altro b, allora quest'altro vale...)

- Criteri di uguaglianza (e similitudine) per i triangoli
- Proprietà dei triangoli isosceli ed equilateri
- (*)I "centri" di un triangolo: orto–, bari–, circo–, in–. (usati di rado, soprattutto in domande a risposta multipla a Febbraio)

- (*)Formule per il raggio del cerchio inscritto e circoscritto
- Teorema della bisettrice (una bisettrice di un triangolo taglia il lato opposto in segmenti proporzionali ai lati adiacenti)
- Disuguaglianza triangolare
- Teoremi di Pitagora e Euclide
- $3, 4, 5$ è una terna pitagorica!

- Caratterizzazione dei quadrilateri (trapezi, parallelogrammi...)
- Proprietà spicciole dei parallelogrammi (ad es: in un quadrilatero, le diagonali si bisecano scambievolmente sse è un parallelogramma), dei rombi, dei quadrati
- (*)Criteri di inscrittibilità e circoscrittibilità dei quadrilateri

- Teorema di Talete

- Teoremi delle due secanti, delle due corde, della secante/tangente
- Angolo al centro=2*angolo alla circonferenza
- "Cose" perpendicolari in una circonferenza (ad es. raggio e tangente, corda e congiungente al centro)
- e, ovviamente: Definizione di circonferenza (tutti i raggi sono lunghi uguale ...)
- (**)Circonferenza di Apollonio (fissati A e B, il luogo dei punti P t.c. $\frac{AP}{BP} = k$ (se $k \neq 1$) è una circonferenza)

- Comportamento intuitivo dell'area rispetto al "tagliare" e all' "incollare" figure.
- Aree (e perimetri) delle figure elementari: triangolo, trapezio, parallelogramma, rettangolo, (*)esagono regolare, cerchio
- (**)Formula di Erone (XXX: serve veramente? boh! Qualcuno confermi, per favore)

- Concetto intuitivo di isometria (e suo comportamento): rotazioni, simmetrie (nel piano)
- (*)Omotetie. Comportamento di lunghezze / aree per sotto omotetie.

- Definizione di luogo; avere visto almeno una volta nella vita una dimostrazione (sintetica!) su una ricerca di luogo. Necessità di provare entrambi i versi per una corretta ricerca di luogo (se P sta sulla retta, allora verifica la proprietà. Se P non sta sulla retta, allora non verifica la proprietà)

- Geometria solida: nozione e visione intuitiva dei solidi ("idea di 3D"); (*)idea di "piano che taglia una figura solida; volumi del prisma e della (*)piramide (inclusi cono e cilindro, che sono dei casi particolari di piramide e prisma!)
- Trovare proprietà della geometria piana (ad es. similitudini) all'interno di pezzi di figure solide
- Avere visto almeno una volta nella vita un problema che usa lo sviluppo sul piano di un solido (cubo, cono, cilindro...) (e saper applicare l'idea!).

- Geometria analitica: giochetti standard con rette e circonferenze: calcolare l'equazione della congiungente, incrociare rette e circonferenze...
- Geometria analitica: avere visto almeno una volta nella vita come si può usare la g.a. per calcolare un "luogo"
- Importantissimo: geometria analitica: accorgersi di quando si può usarla con profitto e quando invece conduce solo a un mare di conti insolubili ☺

1.4 Combinatoria

- Fattoriale. Definizione e calcolo.
- Concetto ingenuo di "in quanti modi..." (se posso scegliere X in

  3 modi e Y in 5, allora ho in totale 15 modi...) (se vale A o B, allora posso scegliere in $A + B$ modi)
- Conteggi notevoli (aka (in campo scolastico, questi nomi sono un obbrobrio!) "disposizioni", "permutazioni", "combinazioni") (nota: se sapete fare il punto precedente, allora sapete fare anche questi!)
- Binomiali. Definizione, uso nei conteggi e (*)alcune proprietà

- Insiemistica: disegnare diagrammi e "contare gli elementi" in ogni zona

- (*)Avere visto almeno una volta nella vita una dimostrazione che faccia uso di una colorazione. Negli ultimi anni c'è sempre stato un problema che si risolveva (anche) con le colorazioni.
- (**)Idea di *double-counting*. Avere visto almeno una volta nella vita una dimostrazione che ne faccia uso.

- Probabilità: definizione (casi favorevoli / casi possibili); calcolo mediante il metodo intuitivo "prendo tanti casi equiprobabili e applico la definizione"

1.5 F

rattaglie

- Logica elementare
- Avere visto almeno una volta nella vita un problema di "cavalieri e furfanti"
- Sapere risolvere un problema di mentitori con la "tavola della verità" (vel a tentativi)

  (**)Idea intuitiva di induzione (alcuni problemi di Cesenatico ne fanno uso, ma credo (XXX: faccio bene?) che un semplice "e così via" sia più che sufficiente per i correttori) (**)Idea intuitiva di pigeonhole (aka "principio dei cassetti) (stesso discorso dell'induzione) (XXX: va veramente classificato qui? help!)

- Formule di fisica "elementare" per il moto a velocità uniforme: $s = s_0 + v \cdot t$ e simili
- Disegnare diagrammi spazio/tempo e interpretarli geometricamente (velocità=pendenza della retta...)

2 Livello 2: Cesenatico "avanzato"

Qui vanno molti argomenti che sono in un certo senso "opzionali" e che possono servire per affrontare i problemi più difficili di Cesenatico, oppure tecniche più avanzate che abbreviano le soluzioni.

3 Livello 3: Ben figurare agli stage di Pisa

#include Dispense di Gobbino

4 Livello 4: Affrontare le IMO

Imparare a menadito le dispense di Gobbino.

Possono servire se mirate alle internazionali libri più avanzati (ad esempio: Engels, Larson, dispense di Naoki Sato e Kedlaya), se già studiati in precedenza: secondo me un'overdose di teoria prima delle IMO può avere solo effetti negativi. Se siete stati convocati per le IMO e non sapete che fare per prepararvi meglio nel mese rimanente, *non* è il momento migliore per mettersi a studiare un nuovo tomo di teoria. Coraggio, se vi siete qualificati siete già (quasi) pronti per affrontarle. In bocca al lupo[1]!

XXX: TODO: bibliografia. Libri consultati: barsanti-conti-franzoni-de lellis, dispense di gobbino, Larson & Engels

[1] Crepi il lupo.