# Quanto è difficile moltiplicare matrici?

## Complessità bilineare e rango di bordo

Federico Poloni

13 Aprile 2006

*"I see the eigenvalue in thine eye,*
*I hear the tender tensor in thy sigh."*
*—Stanislaw Lem, Cyberiad*

# L'algoritmo di Strassen

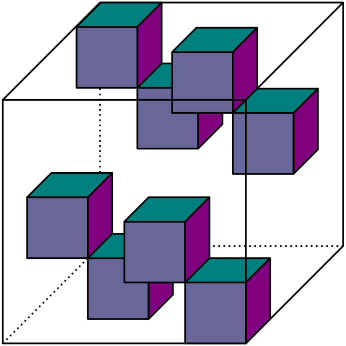
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \\ m_2 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \\ m_3 &= (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\ m_4 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ m_5 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) \\ m_6 &= a_{22}(b_{21} - b_{11}) \\ m_7 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_1 + m_2 - m_4 + m_6 \\ c_{12} &= m_4 + m_5 \\ c_{21} &= m_6 + m_7 \\ c_{22} &= m_2 - m_3 + m_5 - m_7 \end{aligned}$$

7 moltiplicazioni e 18 addizioni (invece di 8+4) [Strassen, 1969]

# Il tensore del prodotto di matrici



$$\begin{aligned}\langle 2,2,2\rangle &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + \\ &\quad (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{12} + \\ &\quad (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{21} + \\ &\quad (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{2} a_{ij}b_{jk}c_{ik}\end{aligned}$$

# Il rango di bordo

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $T$ ha rango 3. Però...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o anche

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon T + O(\varepsilon^2)$$

Rango di bordo di un tensore $t \in k^{m\times n\times p}$:
è il minimo $r$ per cui esiste $\tilde{t} \in k[\varepsilon]^{m\times n\times p}$ di rango $r$ con termine di grado più basso uguale a $t$

Per il tensore $t$ qui sopra, $\mathrm{R}(t) = 3$ ma $\underline{\mathrm{R}}(t) = 2$.

# L'esempio di Bini

$$F = \text{tensore di } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a_{12} + \varepsilon a_{11})(b_{12} + \varepsilon b_{22})c_{21} &+ \\ (a_{21} + \varepsilon a_{11})b_{11}(c_{11} + \varepsilon c_{12}) &- \\ a_{12}b_{12}(c_{11} + c_{21} + \varepsilon c_{22}) &- \\ a_{21}(b_{11} + b_{12} + \varepsilon b_{21})c_{11} &+ \\ (a_{12} + a_{21})(b_{12} + \varepsilon b_{21})(c_{11} + \varepsilon c_{22}) &= \varepsilon F + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$\underline{R}(F) = 5$. Usando questo risultato, $\omega < 2.77989$ [Bini *et al.*, 1979]

# Il $\tau$-teorema di Schönhage

Teorema (Schönhage, 1981)

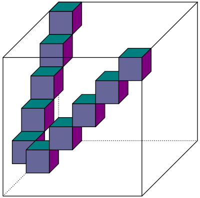
$$\underline{\mathrm{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{s}\langle m_i, n_i, p_i\rangle\right) \leq r \Longrightarrow \sum_{i=1}^{s}(m_i n_i p_i)^{\omega/3} \leq r$$

Esempio di Schönhage

$$\underline{\mathrm{R}}(\langle h, 1, k\rangle \oplus \langle 1, (h-1)(k-1), 1\rangle) \leq hk + 1$$

- Il *border rank* non è additivo
- $h = k = 4 \Longrightarrow \omega \leq 2.55$ [Schönhage, 1981]

# Il metodo laser di Strassen



$$\underline{\mathrm{R}}\left(\sum_{i=1}^{5} a_i b_0 c_i + a_0 b_i c_i\right) \leq 6$$

Componiamone (con $\bigotimes$) tre copie:

$$\sum_{i,j,k=1\ldots5} \Big( a_{ij0} b_{0jk} c_{i0k} + a_{ijk} b_{0jk} c_{i00} + a_{ij0} b_{00k} c_{ijk} + a_{ijk} b_{00k} c_{ij0} + a_{0j0} b_{ijk} c_{i0k} + a_{0jk} b_{ijk} c_{i00} + a_{0j0} b_{i0k} c_{ijk} + a_{0jk} b_{i0k} c_{ij0} \Big)$$

- ha la struttura "a blocchi" di un prodotto $\langle 2, 2, 2\rangle$:

$$\begin{pmatrix} a_{ij0} & a_{0j0} \\ a_{ijk} & a_{0jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{0jk} & b_{00k} \\ b_{ijk} & b_{i0k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i0k} & c_{ijk} \\ c_{i00} & c_{ij0} \end{pmatrix}$$

- il prodotto in ogni blocco è di tipo $\langle m, n, p\rangle$ con $mnp = 5^3$

Utilizzando questo tensore, $\omega \leq 2.479$ [Strassen, 1987]

# La costruzione di Coppersmith e Winograd

- Struttura a blocchi: $N$-esima potenza di un tensore planare
- Famiglia di funzioni $A_w$, $B_w$, $C_w$ degli indici delle $a$, $b$, $c$ tali che $A_w + B_w + C_w = 0 \quad \forall w$
- Se una di queste funzioni fosse iniettiva, sapremmo estrarre una diagonale
- Mediamo su tutte le possibili scelte di $w$: la funzione "media" è quasi iniettiva e fornisce una diagonale "abbastanza grande"
- $\tau$-teorema sulla diagonale trovata: $\omega < 2.41$
- Introducendo dei "pesi" per gli elementi della diagonale, $\omega < 2.39$
- Raffinando queste idee, si arriva a $\omega < 2.376$ [Coppersmith e Winograd, 1987]