

Una dimostrazione elementare dell'ellitticità delle orbite

Federico Poloni

30 maggio 2002

“E ora, veniamo alla Teoria della Gravitazione Universale”. Pronunciò quelle parole in modo da far risaltare le maiuscole [...] “Ma lei che cosa ne sa, poi, di gravitazione?”

“Niente, tranne che è una scoperta piuttosto recente, una teoria non del tutto definita, e che comporta cognizioni matematiche quanto mai complicate, al punto che soltanto una dozzina di individui, su tutto Lagash, pare siano in grado di capirci qualcosa.”

“Sciocchezze! Pallonate! Posso riassumerle io, in una frase, tutto il concetto essenziale. La Legge della Gravitazione Universale afferma che, tra tutti i corpi dell’universo, esiste una forza di attrazione, tale che il quantitativo di questa forza, tra due corpi qualsiasi, è proporzionale al prodotto delle loro masse diviso per il quadrato della distanza che li separa”

“Tutto qui?”

[Isaac Asimov, Nightfall (Notturmo)]

Capitolo 1

Il problema delle orbite

1.1 Dimostrazioni diverse

Le orbite che i pianeti percorrono intorno al Sole hanno la forma di ellissi. Il primo ad accorgersene, sulla base delle sue osservazioni, fu Johannes Kepler, nel 1609. L'astronomo però non fornì nessun tipo di giustificazione teorica per le sue affermazioni. Solo ottanta anni dopo Isaac Newton pubblicò i *Principia* [1], in cui l'ellitticità delle orbite era per la prima volta dimostrata, sulla base delle tre leggi della dinamica e della legge di gravitazione universale (vedi sezione 2.3). La dimostrazione di Newton aveva natura principalmente geometrica e si fondava sulle proprietà delle curve coniche, il cui studio risale al III secolo A.C., e sul metodo dell'*extrema ratio*, cioè di quello che oggi chiamiamo calcolo dei limiti.

Nei secoli successivi, con lo sviluppo dell'analisi infinitesimale (di cui proprio Newton stava gettando le basi in questa e in altre opere) è stato possibile elaborare dimostrazioni diverse e più conformi al rigore della matematica moderna. Oggi l'ellitticità delle orbite (o, più in generale, il fatto che le orbite sono sezioni coniche) viene dimostrata nei corsi di laurea specifici utilizzando la teoria delle equazioni differenziali. Le dimostrazioni ottenute sono più rigorose ma molto meno intuitive e necessitano di elementi di matematica avanzata. Quello che Newton aveva provato utilizzando una brillante costruzione geometrica ora si riduce all'applicare un metodo di soluzione per le equazioni del moto, con un ragionamento astratto e analitico. Tuttavia l'interesse per dimostrazioni più semplici ed elementari si è mantenuto vivo, per diletto matematico più che per reale utilità. In particolare, nel 1964 il nobel per la fisica Richard Feynman riprese la dimostrazione originale di Newton e cercò di ricavarne una lezione per le matricole del corso di fisica del California Institute of Technology. Trovando difficile da seguire la dimostrazione di Newton, Feynman decise di modificarne sensibilmente la seconda parte:

Il resto della dimostrazione che vedrete ora non corrisponde a quella originale di Newton, perché ho scoperto che io stesso non riuscivo a seguirla molto bene, dato che implica tante proprietà delle sezioni coniche. Così ne ho escogitata un'altra.
[2, pag. 151]

La dimostrazione di Feynman è stata poi ripresa e chiarita ulteriormente nel libro *Il moto dei pianeti intorno al sole* [2] di Goodstein. Pur "prendendo in prestito" alcuni concetti da branche della matematica come la geometria differenziale, la dimostrazione di Feynman è altrettanto elementare di quella di Newton e senza dubbio più intuitiva, in quanto molte delle proprietà

geometriche usate da quest'ultimo oggi sono praticamente sconosciute. Si può tranquillamente seguire partendo dal solo programma di geometria e di fisica del biennio delle scuole superiori.

In questo documento ripresenterò la dimostrazione di Feynman sostituendone il passo finale con un ragionamento diverso (ma sempre nell'ambito della geometria elementare) e più generale della dimostrazione originale.

1.2 Il problema trattato

Verrà trattato il problema di descrivere il moto di due corpi puntiformi sottoposti alla sola forza di attrazione gravitazionale tra loro; si dimostrerà che tutte le orbite permesse dalle leggi di Newton hanno la forma di sezioni coniche. Si trascura in questa trattazione ogni altra forza.

Il risultato che otterremo descrive con molta approssimazione il moto reale della Terra attorno al Sole, anche se le semplificazioni introdotte (necessarie, d'altra parte, per trattare il problema in modo matematicamente esatto) non tengono conto delle altre forze agenti sulla Terra. Sono infatti di intensità trascurabile rispetto all'attrazione solare forze come l'attrazione gravitazionale della Luna e dei pianeti, o gli errori dovuti alla non perfetta sfericità della Terra. Dalle simulazioni numeriche sappiamo che esse danno origine a leggeri scostamenti dall'ellisse ideale, determinando i cosiddetti *moti millenari*; tuttavia non alterano sensibilmente la forma dell'orbita.

Il problema di descrivere le orbite di tre o più corpi soggetti alla reciproca attrazione gravitazionale invece non è oggi risolvibile esattamente né in modo sintetico né utilizzando l'analisi.

1.3 Rigorosità ed elementarità della dimostrazione

Nella seconda metà dell'Ottocento si è cercato di dare all'analisi matematica una sistemazione "moderna", più rigorosa, che ha comportato tra l'altro la necessità di molte dimostrazioni di esistenza considerate non necessarie in precedenza. Pertanto dimostrazioni come quella data a suo tempo da Newton oggi non sono considerate "rigorose" e si potrebbe obiettare sulla loro esattezza; in questa categoria rientrano anche la dimostrazione di Feynman e quella presentata in questo documento, che da essa deriva. Ad esempio, nelle sezioni 4.1 e 4.2 sarebbe necessario giustificare che è lecito approssimare l'orbita con una spezzata e che questa spezzata si avvicina sempre di più all'orbita man mano che si diminuiscono gli intervalli di tempo. Queste lacune tuttavia possono essere colmate con ragionamenti e dimostrazioni tipici dell'analisi e non inficiano la validità del ragionamento: al tempo di Newton non vi furono obiezioni sulla validità della sua dimostrazione, e lo stesso Feynman presenta la sua come una dimostrazione esatta.

Quanto all'elementarità della dimostrazione, in questo documento si è cercato di riferirsi solo a concetti di geometria euclidea, come considerazioni sugli angoli e sulla similitudine. In particolare, ho scelto di evitare l'uso di concetti propri dell'analisi e della trigonometria.

1.4 Originalità della dimostrazione

Le sezioni 3.1 e 3.4 presentano fatti noti della geometria euclidea e differenziale. Le sezioni 3.2 e 3.3 sono tratte da [4] e sono dimostrazioni comuni nei corsi di fisica. Il contenuto della sezione 4.1 risale a Newton. Le dimostrazioni di 4.2 e 4.3 sono attribuite da Feynman a un libro di

Fano (U. Fano e L. Fano, *Fisica elementare degli atomi e delle molecole*, 1959) ma Goodstein [2] fa notare come l'idea del diagramma della velocità risalga a Sir William Hamilton e James Clerk Maxwell, cioè alla metà dell'Ottocento. Il contenuto del capitolo 5 è stato elaborato servendosi di una trattazione sulle curve podarie presentata in [5, pag. 36]. L'idea di utilizzare le proprietà delle podarie per completare la dimostrazione è dell'autore, ma potrebbe essere espressa anche in altre opere sullo stesso argomento, come un libro di Maxwell citato in [2] su cui non mi è stato possibile trovare altre informazioni (*Matter and Motion*, J. C. Maxwell, 1877).

Capitolo 2

Definizioni e principi

2.1 Posizione, velocità, accelerazione

Chiamiamo $s(t)$ la posizione di un punto al tempo t . Questa funzione si riferisce alla posizione di un punto nel piano o nello spazio. La velocità (istantanea) all'istante t è definita (seguendo Newton) come la quantità a cui si avvicina indefinitamente il rapporto

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

che indicheremo anche con

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

quando i due istanti t_2 e t_1 si avvicinano sempre di più. È quello che Newton indicava con il termine *extrema ratio*, “ultimo rapporto” prima che le due quantità si annullino, e che oggi si chiama limite del rapporto $\Delta s / \Delta t$ ¹.

L'accelerazione, analogamente, è il limite del rapporto

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.1}$$

e verrà indicata con $a(t)$ ².

2.2 Sezioni coniche

Vengono definite *sezioni coniche* (o semplicemente coniche) l'ellisse, la parabola e l'iperbole. Talvolta si intendono come “coniche degeneri” anche una retta, una coppia di rette e un punto. Ci si riferisce ad esse con un termine unico perché queste curve hanno molte proprietà in comune e formano in effetti una famiglia di curve. Una di queste proprietà è proprio quella che dimostreremo: tutte le orbite permesse dalle leggi di Newton sono sezioni coniche. Notiamo il fatto che sono possibili quali orbite degeneri un punto — quando i due corpi sono coincidenti

¹La definizione coincide sostanzialmente con quella “moderna” come derivate $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$. Questa è la forma usata anche da Newton [1] e da Goodstein [2].

²Si noti che posizione, velocità e accelerazione non sono grandezze scalari ma vettoriali, ossia hanno direzione e verso propri e vanno sommate e sottratte come vettori. In questa dimostrazione tuttavia verrà principalmente usato il valore assoluto di tali grandezze.

— e una retta (o più precisamente una semiretta) — quando il corpo ha velocità iniziale diretta esattamente verso il centro attrattore: in tal caso infatti esso cadrà direttamente sul nostro “Sole” senza alcuna possibilità di deviare.

Ecco le definizioni più elementari possibili delle tre curve, così come le useremo nella dimostrazione:

- L'ellisse è l'insieme dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti che vengono detti *fuochi*.
- L'iperbole è l'insieme dei punti per i quali è costante la differenza (in valore assoluto) delle distanze da due punti detti *fuochi*.
- La parabola è l'insieme dei punti equidistanti da una retta (detta *direttrice*) e da un punto (detto *fuoco*).

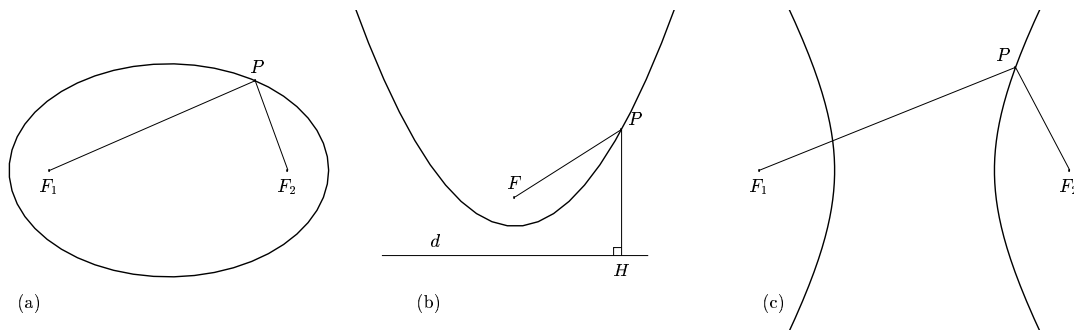


Figura 2.1: Le sezioni coniche.

- (a): ellisse di fuochi F_1 e F_2 . Il valore $F_1P + PF_2$ è costante per tutti i punti P della figura.
 (b): parabola di fuoco F e direttrice d . Per ogni punto P della figura $FP = PH = d(P, d)$
 (c): iperbole di fuochi F_1 e F_2 . Per ogni punto P della figura il valore $|F_1P - PF_2|$ è costante.

2.3 Le tre leggi di Newton e la legge di gravitazione universale

Le tre leggi della dinamica e quella della forza gravitazionale sono a fondamento del modello Newtoniano della fisica, su cui si baserà la dimostrazione. Eccole enunciate.

Prima legge della dinamica (inerzia): un corpo sul quale non agiscono forze permane nel suo stato di quiete o di moto con velocità uniforme e senza cambiare direzione

Seconda legge della dinamica: l'accelerazione subita da un corpo è proporzionale alla forza applicata su di esso e ha la stessa direzione e verso di questa.

Ossia in formula:

$$F = m \cdot a \quad (2.2)$$

Questa legge viene integrata dal primo corollario di Newton:

Corollario: se un corpo è soggetto a due velocità, accelerazioni o forze contemporaneamente la loro risultante viene calcolata mediante la “regola del parallelogramma” (figura 2.2).

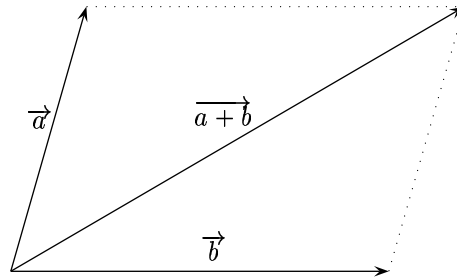


Figura 2.2: La “regola del parallelogramma”: per trovare la risultante $\vec{a} + \vec{b}$ si traccia il parallelogramma che ha per lati i due vettori \vec{a} e \vec{b} e si prende la sua diagonale che esce dallo stesso vertice.

Terza legge della dinamica (azione e reazione): se un corpo A esercita una forza su un corpo B allora anche il corpo B esercita una forza uguale e di verso opposto sul corpo A .

È questa legge che permette di considerare la Terra e il Sole come due corpi puntiformi ignorando le forze tra le diverse parti che li compongono: infatti se anche vi sono forze tra due corpi che fanno parte del “sistema Terra” (per esempio la forza di attrazione tra l’acqua contenuta negli oceani e la Terra) ognuna di esse ha una corrispondente uguale ed opposta e quindi la loro somma è nulla.

Legge di gravitazione universale: tra due corpi qualsiasi nell’universo esiste una forza attrattiva uguale a

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (2.3)$$

dove G è una costante, m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e d è la distanza tra di essi.

È importante notare che le quantità chiamate m in questa formula (cioè le *masse gravitazionali* dei corpi) sono uguali per ogni corpo a quelle della formula 2.2 (cioè le *masse inerziali*). Da un punto di vista strettamente matematico non è affatto ovvio che esse debbano coincidere e il fatto è stato completamente spiegato solo con la Teoria della Relatività. Prima conseguenza del fatto che la massa inerziale e quella gravitazionale coincidono è che quando un corpo è soggetto solo alla forza gravitazionale si ha

$$\begin{aligned} ma &= m \frac{GM}{d^2} \\ a &= \frac{GM}{d^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

pertanto l’accelerazione, e quindi la traiettoria (che è definita completamente fornendo punto iniziale, velocità e accelerazione), non dipendono dalla massa del corpo orbitante. Questo implica che due corpi di massa diversa cadono nello stesso tempo (come notò Galileo) e in generale che la traiettoria descritta da un corpo è indipendente dalla sua massa.

Capitolo 3

Alcuni fatti utili

3.1 Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

Teorema (della potenza di un punto rispetto a una circonferenza): Dati un punto P e una circonferenza, se tracciamo una retta che incontri la circonferenza in due punti A e B (anche coincidenti) il prodotto $PA \cdot PB$ non varia qualunque sia la retta scelta, cioè dipende solo dal punto e dalla circonferenza. Il suo valore viene detto *potenza del punto P rispetto alla circonferenza*.

Lo si può provare facendo uso soltanto dei teoremi sulla similitudine; la dimostrazione viene normalmente trattata nei programmi di geometria del biennio del liceo scientifico, anche se non nella forma in cui abbiamo enunciato il teorema.

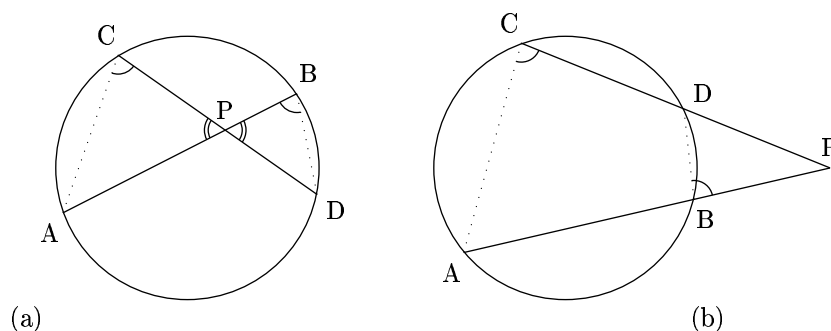


Figura 3.1: I due casi del teorema sulla potenza di un punto.

- (a): Caso “delle due corde”: dobbiamo provare che $CP \cdot PD = AP \cdot PB$. Gli angoli \widehat{ACP} e \widehat{PBD} sono uguali perché insistono sullo stesso arco, quindi i due triangoli ACP e DBP sono simili. In particolare ne segue che $AP : PD = CP : PB$, cioè $AP \cdot PB = CP \cdot PD$
- (b): Caso “delle due secanti”: gli angoli \widehat{ACD} e \widehat{ABD} insistono su archi opposti e quindi sono supplementari; perciò l'angolo \widehat{DBP} è uguale a \widehat{ACD} . I triangoli PBD e PCA sono simili, e quindi $AP : PD = CP : PB$, cioè anche in questo caso $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

3.2 Sistema di riferimento

Sembrerebbe naturale (almeno negli ultimi 300 anni!) assumere il Sole come centro immobile del sistema di riferimento. Tuttavia le leggi di Newton (pag. 8) ci dicono che un corpo può essere considerato fermo solo se su di esso non agiscono forze. E sul Sole agisce sicuramente una forza, quella gravitazionale esercitata dalla Terra. Ne risulta quindi che anche il Sole si muove seguendo un'orbita ellittica, sebbene questa sia molto più piccola di quella della Terra e quindi trascurabile. Se però vogliamo che la dimostrazione sia esatta dobbiamo assumere come centro del sistema un punto per cui la risultante delle forze sia nulla. Tale punto è il centro di massa comune del Sole e della Terra¹. Se consideriamo infatti Sole e Terra come un corpo unico puntiforme (concentrato nel suo centro di massa) le due forze Sole–Terra e Terra–Sole sono uguali e opposte (terzo principio della dinamica) e quindi il centro di massa è in quiete o in moto rettilineo uniforme. Possiamo dunque assumere che esso sia fermo.

A questo punto è opportuno trasformare l'equazione 2.4 in una forma che faciliti i calcoli. Dalla definizione di centro di massa sappiamo che i due segmenti S_1O e OT_1 (dove O è il

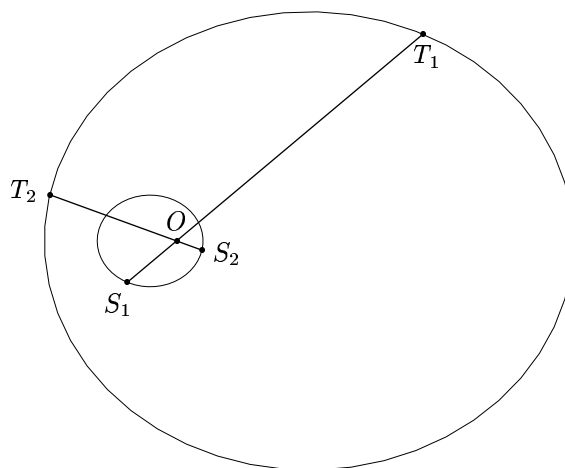


Figura 3.2: Sole e Terra orbitano intorno al centro di massa comune

centro di massa, S_1 e T_1 le posizioni di Sole e Terra in un dato istante) stanno tra loro come i reciproci delle due masse m_s e m_t .

Quindi il segmento $r = OT_1$ è uguale a $\frac{m_s}{m_s+m_t}d$, dove d è la distanza tra Sole e Terra. Tenendo conto di questa uguaglianza, la 2.4 diventa:

$$a = \frac{Gm_s}{d^2} = \frac{Gm_s}{\left(\frac{m_s+m_t}{m_s}\right)^2 r^2}$$

ovvero ponendo $\frac{Gm_s}{\left(\frac{m_s+m_t}{m_s}\right)^2} = k$,

$$a = \frac{k}{r^2} \tag{3.1}$$

Questa equazione determina l'intensità dell'accelerazione su un corpo posto a distanza r dal centro del sistema di riferimento. L'espressione può essere immaginata come la forza di at-

¹Sempre ovviamente trascurando le piccole influenze sull'orbita degli altri pianeti e dei corpi esterni al Sistema Solare.

trazione gravitazionale tra un centro attrattore, uno *pseudo-Sole* (questa volta realmente immobile al centro del sistema di riferimento) e la Terra in movimento. Naturalmente un'equazione analoga descrive l'orbita (molto più piccola) percorsa dal Sole attorno al centro di massa. Quando successivamente si parlerà di “Sole” nel testo il riferimento sarà sempre a questa interpretazione e quindi all'immaginario pseudo-Sole immobile al centro del sistema.

3.3 Piano orbitale

Poiché la Terra e il Sole sono immersi in uno spazio tridimensionale è ragionevole aspettarsi che l'orbita terrestre non sia una curva totalmente compresa in un piano; tuttavia dimostreremo ora che la traiettoria orbitale è completamente planare. Sia π il piano a cui appartengono il centro di rotazione S , il corpo T e la velocità del corpo v nell'istante iniziale (esso esiste perché il punto S e la retta v determinano uno e un solo piano, e il punto T vi appartiene in quanto si trova sulla retta della velocità iniziale). Il corpo, in assenza di forze, percorre la retta a cui appartiene v , che si trova sul piano. Perché il corpo si sposti dal piano occorre che sia sottoposto a un'accelerazione (e quindi a una forza) la cui direzione non sia interna al piano π . Tuttavia l'unica forza esistente nel modello che trattiamo è quella gravitazionale, che è diretta come il segmento ST e quindi è interna al piano. Il corpo orbitante percorre quindi un'orbita giacente sul piano π , che sarà chiamato *piano orbitale*. Il resto della dimostrazione potrà quindi svolgersi in due dimensioni senza timore di perdere in generalità.

3.4 Una proprietà del perielio

È detto *perielio* il punto dell'orbita terrestre più vicino al Sole². Se tracciamo una circonferenza avente centro nel Sole e raggio uguale alla distanza Sole–perielio, essa interseca l'orbita in un solo punto, e tutti gli altri punti dell'orbita sono esterni al cerchio. Questo significa che orbita e circonferenza sono tangenti, ossia che hanno una retta tangente in comune nel punto corrispondente al perielio. Per una proprietà della circonferenza, essa è perpendicolare al segmento che unisce Sole e perielio. Visto che la velocità giace sempre sulla retta tangente all'orbita, possiamo concludere che *nel perielio, la velocità è perpendicolare al raggio Sole–Terra*.

²Dal punto di vista dell'analisi, sarebbe necessaria a questo punto una dimostrazione dell'esistenza del perielio. Possiamo qui considerare “intuitivamente valida” l'esistenza di uno o più punti aventi distanza minima dal Sole.

Capitolo 4

Momento angolare e indicatrice delle velocità

4.1 Costanza del momento angolare

Supponiamo adesso di dover disegnare la traiettoria descritta dal corpo e di approssimarla con una spezzata, immaginando che esso si muova di moto rettilineo uniforme per piccoli intervalli di tempo Δt e che venga poi improvvisamente deviato verso il Sole dalla forza attrattiva al termine di ogni intervallino (figura 4.1). Il corpo percorrerà la spezzata $T_1T_2T_3T_4$, composta

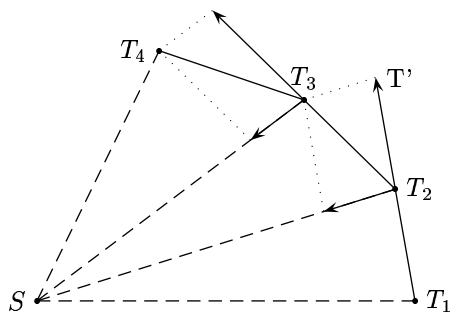


Figura 4.1: Una spezzata approssimante la traiettoria

da segmenti di retta. Consideriamo due dei triangoli formati da un lato di questa spezzata con S , ad esempio T_1ST_2 e T_2ST_3 . Se la forza non esistesse, dopo aver raggiunto il punto T_2 il corpo procederebbe in linea retta e arriverebbe nel punto T' , con $T_1T_2 = T_2T'$ visto che i due intervalli di tempo sono uguali. Notiamo che l'area di T_1ST_2 è uguale a quella di T_2ST' , in quanto hanno la stessa base $T_1T_2 = T_2T'$ e la stessa altezza (uguale alla distanza di S dalla retta T_1T_2T'). Sono uguali anche le aree di T_2ST' e T_2ST_3 , se consideriamo ST_2 come base, perché T_3 e T' giacciono sulla stessa parallela a ST_2 (abbiamo sommato le due velocità con la regola del parallelogramma, quindi i due lati opposti sono paralleli). Tale ragionamento può essere ripetuto per due qualsiasi dei triangoli determinati dalla spezzata con S , perciò hanno tutti area uguale. Se consideriamo quindi due tratti diversi dell'orbita percorsi dal corpo orbitante in un tempo uguale, essi saranno percorsi in un numero uguale n

di multipli dell'intervallo Δt , e quindi descriveranno un'area uguale a $n \cdot \text{area di ogni triangolo}$. Quindi possiamo affermare che l'area percorsa dal corpo è direttamente proporzionale al tempo impiegato per percorrerla (seconda legge di Keplero).

Un'altra conseguenza di questo fatto è la seguente: l'area comune A di ogni triangolo, ad esempio T_2ST_3 , è uguale a $\frac{1}{2} \cdot T_2T_3 \cdot d(S, T_2T_3)$ dove $d(S, T_2T_3)$ è la distanza tra S e la retta T_2T_3 . Inoltre, T_2T_3 è uguale alla velocità v_{T_2} nel punto T_2 moltiplicata per l'intervallo di tempo Δt , quindi possiamo scrivere $A = \frac{1}{2} \cdot v_{T_2} \Delta t \cdot d(S, T_2T_3)$, e perciò $v_{T_2} \cdot d(S, T_2T_3) = \frac{A}{2\Delta t} = \text{costante}$ (che non dipende dalla scelta del punto T_2 . Quando il segmento T_2 diventa molto piccolo, sappiamo che la velocità v_{T_2} , e quindi anche il segmento T_2T_3 , stanno sulla retta tangente all'orbita nel punto T_2 , t_{T_2} : possiamo generalizzare questa relazione ad ogni punto P dell'orbita e affermare che $v_P \cdot d(S, t_P) = \text{costante}$. Questa affermazione, di cui faremo uso nella parte geometrica della dimostrazione, equivale alla legge fisica della conservazione del momento angolare.

4.2 Il diagramma delle velocità

Questo è il punto della dimostrazione dove Feynman si separa da Newton e segue una linea di ragionamento più "moderna". Seguiremo qui il ragionamento del fisico americano.

Tracciamo un diagramma approssimato dell'orbita simile a quello della sezione precedente, ma stavolta invece di mantenere costante il tempo impiegato a percorrere un segmento della spezzata teniamo fisso l'angolo formato dagli estremi di ogni segmento con il Sole (\widehat{JSK} , \widehat{KSL} , \widehat{LSM} ...). Supponiamo che tale angolo θ sia molto piccolo (in modo che la spezzata approssimi la traiettoria reale) e che sia un sottomultiplo esatto dell'angolo giro. Quindi riportiamo i

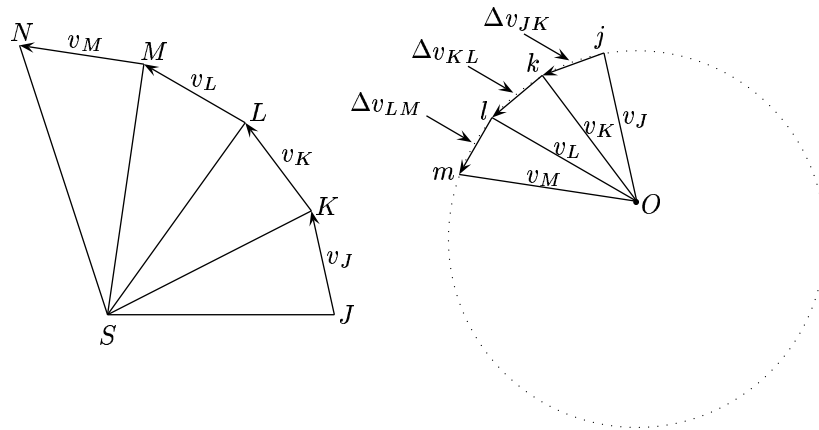


Figura 4.2: Orbita e diagramma della velocità

vettori corrispondenti alle velocità del corpo nei diversi istanti a fianco dell'orbita, in modo che abbiano tutti l'origine O in comune (Oj , Ok , Ol , Om nella figura). I segmenti segnati con Δv (jk , kl , lm) sono allora le variazioni di velocità in ogni intervallo di tempo. Sappiamo dalle leggi di Newton che l'accelerazione è uguale alla variazione di velocità divisa per la variazione del tempo, e quindi

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a = \frac{k}{r^2}$$

(per la 2.1 e la 3.1). Il tempo impiegato a percorrere ognuno dei segmenti, d'altra parte, è proporzionale all'area del triangolo sotteso e quindi a r^2 (per la similitudine tra i triangoli¹). Abbiamo quindi $\Delta t = hr^2$, con h costante. Abbiamo dunque

$$\Delta v = \frac{k\Delta t}{r^2} = \frac{kh r^2}{r^2} = kh = \text{costante}$$

Inoltre i segmenti Δv sono diretti come il corrispondente segmento verso il Sole (jk è diretto come SK , kl come $SL...$) perché le leggi della gravitazione ci dicono che l'accelerazione (e quindi con essa Δv) è sempre diretta verso il Sole. Gli angoli tra jk e kl , kl e lm e in generale gli angoli tra due segmenti Δv successivi sono quindi uguali all'angolo θ scelto in precedenza. Poiché θ è stato scelto in modo da essere un sottomultiplo dell'angolo giro (cioè $\theta = 360^\circ/n$), i segmenti Δv devono descrivere un poligono regolare di n lati. Quando i valori di θ si fanno

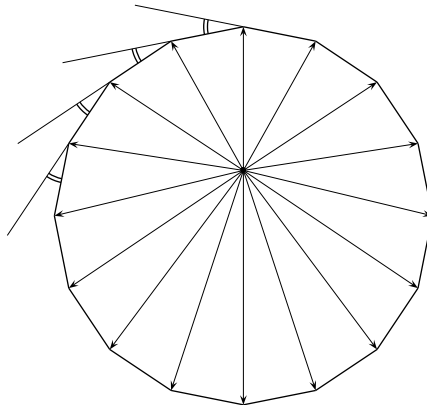


Figura 4.3: Gli angoli esterni segnati con un doppio arco sono tutti uguali a θ , quindi la figura è un poligono regolare. Per valori molto piccoli di θ , il poligono tende ad una circonferenza.

molto piccoli, il poligono regolare si avvicina sempre più a una circonferenza; il diagramma delle velocità dell'orbita reale sarà quindi una circonferenza. Tuttavia, in generale il centro di questa circonferenza non coincide con il punto O da cui irradiano i vettori velocità. O può essere un punto interno al cerchio, esterno ad esso oppure sulla circonferenza. Dimostriamo successivamente che queste tre possibilità corrispondono rispettivamente a un'orbita ellittica, iperbolica oppure parabolica.

4.3 Altre considerazioni sul diagramma delle velocità

Abbiamo detto che il diagramma delle velocità della spezzata che approssima l'orbita è un poligono regolare. Se uniamo i vertici di tale poligono con il centro C del poligono invece che con l'origine O delle velocità, sappiamo che gli angoli formati sono tutti uguali a θ (è una proprietà dei poligoni regolari). Quindi dati due punti della spezzata che distino k segmenti tra di loro, l'angolo tra le due corrispondenti velocità sul diagramma delle velocità è uguale a $k \cdot \theta$. ma anche l'angolo tra i due punti sul disegno dell'orbita è uguale a $k \cdot \theta$, per come è

¹I triangoli che si vengono a formare hanno un angolo uguale per costruzione, θ , e i due lati adiacenti "quasi uguali" tra loro (perché θ è molto piccolo). Essi sono quindi simili e le loro aree stanno tra loro come r^2 .

stato fatto il disegno. I due angoli sono quindi uguali, e tale uguaglianza deve valere anche quando il diagramma delle velocità diventa un cerchio. In generale, dati due punti successivi dell'orbita la loro distanza angolare è uguale all'angolo compreso tra le due corrispondenti velocità sul diagramma.

Si noti anche che sebbene le dimensioni del diagramma delle velocità siano arbitrarie (la lunghezza delle linee che abbiamo chiamato "velocità" dipende anche dall'unità di misura scelta per il tempo) esse sono comunque proporzionali alle velocità reali.

Possiamo a questo punto determinare il punto del diagramma delle velocità a cui corrisponde il perielio. Notiamo innanzitutto che, poiché è costante il rapporto area percorsa/tempo, il perielio deve essere il punto in cui la velocità è maggiore². Ad essa corrisponderà quindi il segmento più lungo uscente da O sul diagramma delle velocità, e si nota immediatamente che questo segmento è quello che passa per il centro della circonferenza.

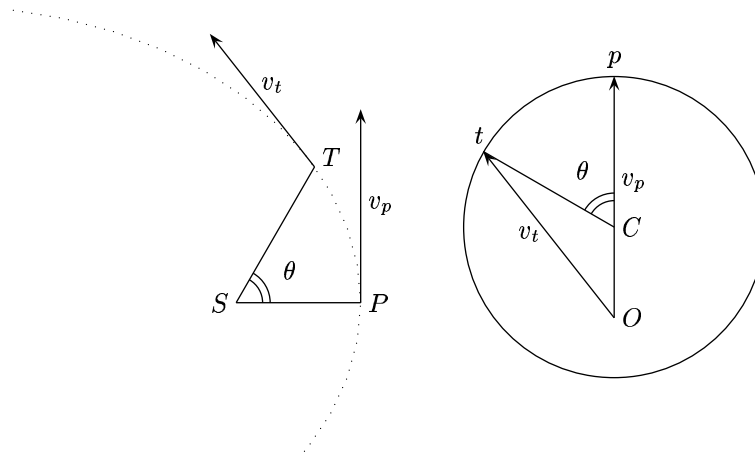


Figura 4.4: Proprietà del diagramma delle velocità. Se P è il perielio, v_p è perpendicolare a SP (proprietà del perielio, vedi sezione 3.4); per un generico punto T e il suo corrispondente t sul diagramma:

1. $\widehat{PST} = \widehat{pCt}$
2. Ot è parallelo a v_t e ha lunghezza proporzionale alla velocità.

²Consideriamo due segmenti della spezzata in figura 4.2, ad esempio JK e MN . I due triangoli JSK e MSN sono simili, per quanto detto nella nota di pag. 17, e inoltre i tempi impiegati per percorrerli sono proporzionali alle aree dei triangoli JSK e MSN . Abbiamo allora $\frac{v_{JK}}{v_{MN}} = \frac{JK/\Delta t_{JK}}{MN/\Delta t_{MN}} = \frac{r_{JK}}{r_{MN}} \cdot \frac{\Delta t_{MN}}{\Delta t_{JK}} = \frac{r_{JK}}{r_{MN}} \cdot \frac{A[JSK]}{A[MSN]} = \frac{r_{JK}}{r_{MN}} \cdot \frac{r_{MN}^2}{r_{JK}^2} = \frac{r_{MN}}{r_{JK}}$, cioè $v_{JK} \cdot r_{JK} = v_{MN} \cdot r_{MN}$. Poiché il perielio è il punto dove r assume il valore minore, v dovrà assumere di conseguenza il valore maggiore.

Capitolo 5

Un po' di geometria

Abbiamo ora tutti i gli elementi necessari e possiamo passare alla parte strettamente geometrica della dimostrazione: da qui in poi non sarà più necessario fare passaggi al limite. Consideriamo come primo caso, che descriveremo più in dettaglio, quello che conduce ad un'orbita ellittica.

5.1 L'orbita ellittica

Supponiamo innanzitutto che il punto o origine del diagramma della velocità sia interno alla circonferenza. Per visualizzare più facilmente le proprietà dell'indicatrice delle velocità ci sarà utile ruotarla di 90° , come in figura 5.1.

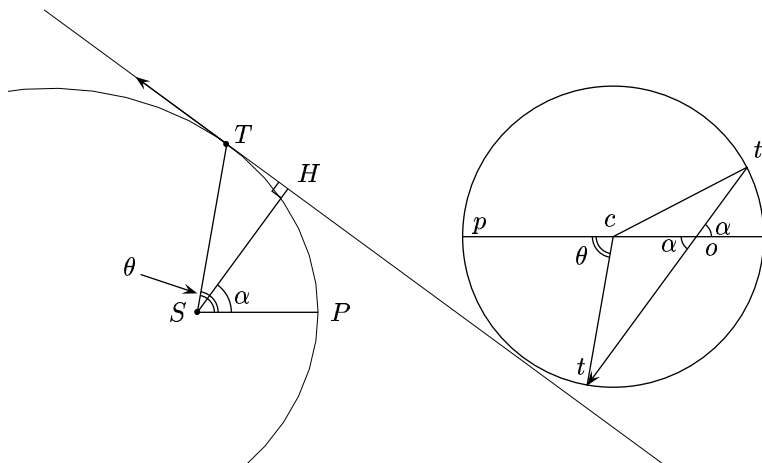


Figura 5.1: Orbita e indicatrice ruotata di 90° .

Poiché la velocità al perielio era perpendicolare al segmento SP , dopo la rotazione le due linee diventano parallele. Il segmento ot , che era invece parallelo alla velocità nel punto T , sarà ora perpendicolare, e cioè orientato come il segmento SH in figura (H è infatti costruito in modo da essere la proiezione di S sulla linea che contiene la velocità). Indicando con α l'angolo \widehat{HSP} , avremo quindi $\widehat{COt} = \alpha = \widehat{COt'}$. Possiamo inoltre formalizzare la conservazione del momento angolare (sezione 4.1) come $v \cdot SH = M$, dove M è una costante. Per il teorema 3.1 abbiamo invece che $Ot \cdot Ot' = costante$, o anche, sapendo che Ot è proporzionale a v ,

che $v \cdot Ot' = l$, con l costante. Quindi abbiamo $SH/Ot' = m/l = \text{costante}$ in ogni punto dell'orbita: grazie a questa proprietà possiamo portare a coincidere i due segmenti traslando il cerchio in modo che $O \mapsto S$ e ingrandendone la scala di un fattore m/l . Sovrapponendo le figure in questo modo, otteniamo il disegno in figura 5.2 .

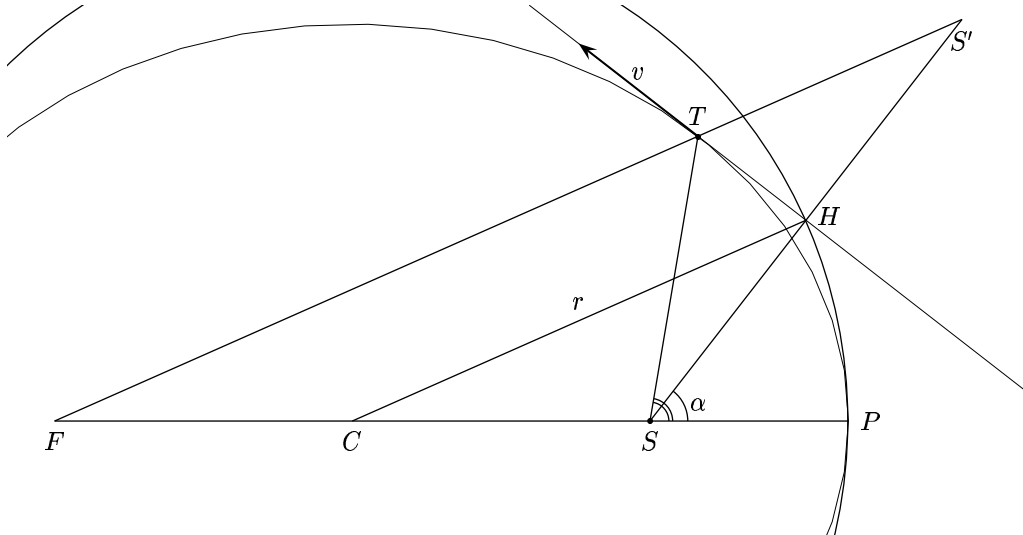


Figura 5.2: Orbita (tratto leggero) e indicatrice (tratto normale) sovrapposte

Poiché la figura è stata ingrandita di un fattore costante, la posizione di C (il centro della circonferenza) non dipenderà dal particolare punto dell'orbita per cui è stata tracciata la figura. Per questo, quando T percorre i diversi punti dell'orbita, H percorre la circonferenza che abbiamo tracciato. Questa proprietà (insieme al fatto che o è interno alla circonferenza) è sufficiente per dimostrare che l'orbita è ellittica. Abbiamo portato a sovrapporsi il punto o della figura 5.1 con il punto S della figura 5.2, e il punto t' con il punto H . Possiamo ricavare dalle due figure le seguenti uguaglianze:

$$\widehat{ct'o} = \widehat{cto} = \widehat{pct} - \widehat{cot} = \theta - \alpha$$

$$\widehat{TS'H} = \widehat{TSP} - \widehat{HSP} = \theta - \alpha$$

Ora, definiamo il punto S' come il simmetrico di S rispetto alla retta v e il punto F come il punto di incontro delle rette $S'T$ e SC ¹. Per simmetria, abbiamo $\widehat{TS'H} = \widehat{TSH} = \theta - \alpha$; i triangoli CSH e FSS' sono allora simili perché hanno due angoli uguali. Il loro rapporto, in particolare, è di $1 : 2$ perché $SH = HS'$. Quindi $FC = CS$, il che significa che la posizione di F dipende solo da quella di S e C e quindi è costante lungo tutta l'orbita; e infine $FS' = 2 \cdot CH$, ma CH è uguale al raggio della circonferenza tratteggiata e dunque è costante anch'essa lungo tutta l'orbita. Possiamo allora scrivere

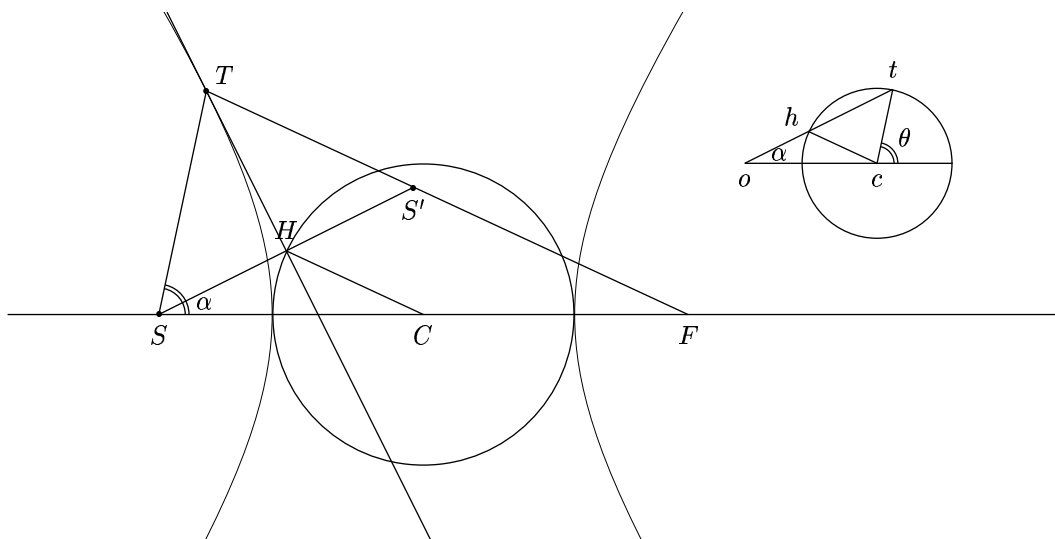
$$\text{costante} = FS' = FT + TS' = FT + TS$$

¹Perché la dimostrazione sia formalmente corretta è necessario giustificare il fatto che F si trova "a sinistra" di C e non "a destra" di S sul disegno. Questo avviene perché O è interno alla circonferenza e quindi, per le proprietà degli angoli al centro, $\widehat{PCt} < 2\widehat{pOt}$, cioè $\theta < 2\alpha$. Come sarà detto tra breve nel testo, $\widehat{TS'S} = \theta - \alpha$ e quindi $\widehat{TS'S} < \alpha$. Per il quinto postulato di Euclide sulle parallele, le due rette ST e CS devono quindi incontrarsi dalla parte di C .

Abbiamo scoperto in questo modo che il generico punto T sull'orbita è tale che la somma delle sue distanze dai due punti fissi F e S è costante. Ma questa è esattamente la proprietà che caratterizza un'ellisse, così come abbiamo definito questa curva nella sezione 2.2. Possiamo dunque concludere che l'orbita descritta da T è un'ellisse (o perlomeno una porzione di ellisse).

5.2 Il caso dell'iperbole

Supponiamo adesso che o sia esterno alla circonferenza e procediamo con una nuova dimostrazione. Tracciamo di nuovo la tangente all'orbita nel suo generico punto T (che forma un



angolo θ con il perielio) e la normale a questa SH ; parallelamente disegniamo il diagramma delle velocità, con origine in o e centro della circonferenza in c ; sia t il punto corrispondente alla posizione e velocità di T . Supponiamo per il momento che l'ulteriore intersezione h di st con il diagramma delle velocità stia all'interno del segmento st .

Dalla conservazione del momento angolare abbiamo, come nel caso dell'ellisse, che $SH \cdot v = M$, $SH = M/v$. Nel diagramma delle velocità stavolta $sh \cdot st = \text{costante}$, $sh = \text{costante}/v$ (per il caso delle due secanti del teorema di pag. 11), e perciò possiamo portare diagramma e orbita a sovrapporsi con un opportuno cambio di scala. La posizione di C è così fissata. Sia S' , di nuovo, il simmetrico di S rispetto alla tangente TH e F il punto di intersezione tra TS' e SC . Abbiamo, per lo stesso argomento usato nel caso precedente, che $\widehat{CSH} = \widehat{coh} = \alpha$; inoltre, da semplici considerazioni sugli angoli otteniamo:

$$\widehat{SHC} = \widehat{ohc} = 180^\circ - \widehat{cht} = 180^\circ - \widehat{cth} = 180^\circ - (\theta - \alpha)$$

$$\widehat{SS'F} = 180^\circ - \widehat{SS'T} = 180^\circ - \widehat{S'T} = 180^\circ - (\widehat{CST} - \widehat{CSH}) = 180^\circ - (\theta - \alpha)$$

sull'altra. Quindi SHC e $SS'F$ sono due triangoli simili con rapporto di similitudine $SH/SS' = 1/2$, e perciò il punto F è univocamente determinato (come $SF = 2SC$) al variare di T lungo l'orbita. Abbiamo infine $CH = \text{costante}$ in quanto è il raggio della circonferenza delle velocità ingrandito di un fattore fissato, e quindi

$$FT - ST = FT - S'T = FS' = 2 \cdot CH = \text{costante}$$

al variare di T sull'orbita, che è esattamente la definizione di iperbole data nella sezione 2.2.

5.2.1 Ancora iperboli

Nella dimostrazione precedente abbiamo supposto che sul diagramma della velocità il punto h fosse compreso tra s e t ; in questo modo però il segmento ot (e quindi anche il corpo T , perché $\widehat{pct} = \widehat{PST}$) può “percorrere” solo una parte della circonferenza, ossia uno solo dei due archi determinati dalle tangenti condotte per o . Il caso che avevamo lasciato da parte conduce in realtà a una situazione molto interessante che andremo ora a trattare. In questo caso, che

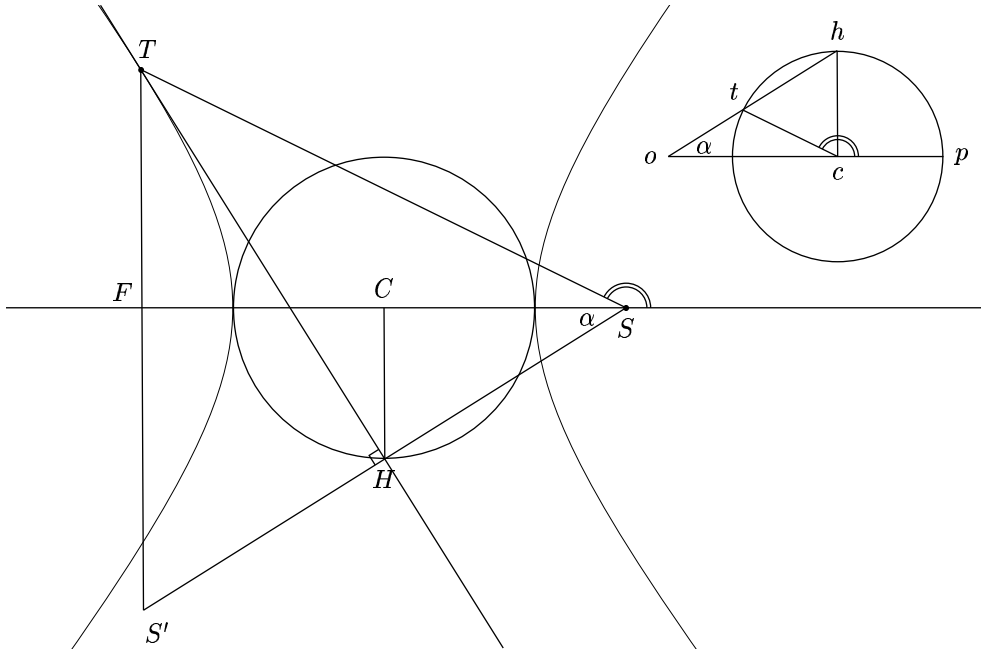


Figura 5.3: il ramo “impossibile” dell’iperbole

è rappresentato in figura 5.3, la velocità del corpo orbitante è proporzionale a st , e quindi sh è proporzionale a $1/v$. Sovrapponiamo come nei due casi precedenti le figure del diagramma della velocità e dell’orbita, e tracciamo il simmetrico S' di S rispetto alla retta della velocità. Questa volta l’intersezione tra $S'T$ e l’asse orizzontale (che chiameremo F) cade all’interno del segmento, quindi non è necessario prolungarlo. Ponendo $\widehat{coh} = \alpha$ e $\widehat{pct} = \theta$, da considerazioni sugli angoli otteniamo:

$$\widehat{SHC} = \widehat{cho} = 180^\circ - \theta + \alpha$$

$$\widehat{HS'T} = \widehat{HST} = 180^\circ - \theta + \alpha$$

$$\widehat{SHC} = \widehat{HS'T}$$

I due triangoli FSS' e CSH sono allora simili, e in particolare il punto F ha distanza $2 \cdot SC$ da S ed è quindi fisso; infine,

$$\text{costante} = FS' = TS' - TF = ST - FT$$

Questa condizione corrisponde alla condizione che T si trovi sulla stessa iperbole del caso precedente, ma questa volta sul ramo opposto (perché cambia il segno della quantità $ST - FT$).

5.2.2 Discussione dei due casi

Se si controlla l'orbita che T dovrebbe seguire in quest'ultimo caso, è facile notare che il corpo non gira intorno al Sole come negli altri casi, ma piuttosto sembra che ne sia. Questa situazione corrisponde infatti al caso in cui la forza tra S e T è proporzionale al quadrato della loro distanza, ma si tratta di una forza *repulsiva*. È chiaro che, essendo la gravità una forza attrattiva, una simile situazione non si potrà mai verificare nella realtà.

C'è però una situazione teorica molto simile a quella che stiamo trattando in cui orbite iperboliche di tipo repulsivo esistono veramente: quella delle forze di natura elettrica. La forza di Coulomb tra due particelle dotate di carica elettrica varia, esattamente come la forza di gravità, con il quadrato della distanza tra i due corpi; soltanto, la costante moltiplicativa che per la forza gravitazionale è Gm_1m_2 per la forza elettrica vale $\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$.

Nella dimostrazione questa è l'unica proprietà che abbiamo usato², quindi quanto dimostrato finora si applica senza difficoltà anche al caso delle forze elettriche. In particolare, nel caso di due particelle con carica dello stesso segno (per esempio due elettroni, o un elettrone e uno ione negativo) la forza è repulsiva, e i due corpi descrivono traiettorie iperboliche di questo tipo. Nel termine della sua lezione Feynman fa notare questo fatto e lo usa per dimostrare utilizzando l'analisi una legge dovuta a Rutherford sull'angolo di deflessione negli urti tra particelle cariche.

5.3 Il caso della parabola

Questa volta non possiamo identificare immediatamente un segmento sul diagramma delle velocità che sia proporzionale a $1/v$, quindi il ragionamento dovrà essere leggermente diverso.

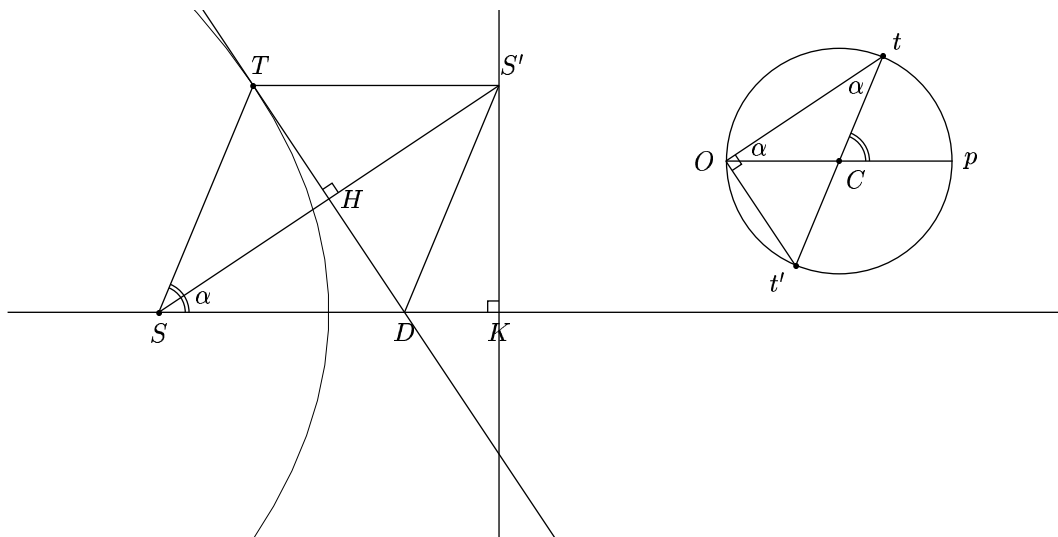


Figura 5.4: il caso-limite dell'orbita parabolica

²Ad eccezione del paragrafo 2.3, quando abbiamo dimostrato che la traiettoria di un corpo è indipendente dalla sua massa. In effetti la traiettoria di una particella sottoposta al solo effetto delle forze di Coulomb non è indipendente dalla massa. Possiamo però dimostrare con un ragionamento analogo che la traiettoria è indipendente dal rapporto carica/massa della particella.

Sul diagramma delle velocità, detto t il punto corrispondente alla posizione del corpo orbitante T , abbiamo che $\widehat{COT} = \widehat{OtC} = \alpha$, perché questa volta O sta sulla circonferenza. Di conseguenza $\theta = \widehat{tCp} = 2\alpha$. Inoltre, detto t' il punto diametralmente opposto a t , sappiamo che $\widehat{Ot'} = 90^\circ$, perché è l'angolo sotteso a una semicirconferenza.

Consideriamo ora il disegno dell'orbita, e tracciamo di nuovo il simmetrico S' di S rispetto alla tangente all'orbita, e l'intersezione di quest'ultima con la linea orizzontale Sole–perielio, D . Abbiamo $\widehat{DSH} = \alpha$, $\widehat{DST} = \theta = 2\alpha$, $\widehat{HS'T} = \widehat{HST} = \theta - \alpha = \alpha$, da cui concludiamo che i due segmenti SD e $S'T$ sono paralleli. Definiamo adesso K come il piede della perpendicolare a SD passante per S' : notiamo che K non è necessariamente fisso ma la sua posizione potrebbe dipendere dal punto T dell'orbita da cui abbiamo cominciato la costruzione; tuttavia dimostreremo adesso che la distanza SK è costante, e quindi K è fisso. Consideriamo i due triangoli $S'SK$ e $t'tO$ (sul diagramma delle velocità): essi hanno un angolo retto e uno uguale ad α , quindi sono simili. Scriviamo perciò una delle similitudini esistenti tra i lati, tenendo conto che $SS' = 2 \cdot SH = 2 \cdot (M/v)$, detto M il momento angolare (costante su tutta l'orbita), e che $tt' = 2r$, con r costante uguale al raggio del cerchio delle velocità:

$$\frac{Ot}{tt'} = \frac{SK}{SS'}$$

$$\frac{v}{2r} = \frac{SK}{2(M/v)}$$

$$SK = \frac{v}{2r} \cdot \frac{2M}{v} = \frac{M}{r} = \text{costante}$$

K quindi non varia a seconda della posizione di T ed è un punto fissato nello spazio. È allora fissata anche la retta $S'K$, che è la retta verticale passante per K . Poiché $S'T$ è parallelo a SK , $\widehat{KS'T}$ è retto e quindi $S'T$ è uguale alla distanza tra T e la retta fissata $S'K$. Poiché $ST = S'T'$, abbiamo che in ogni punto dell'orbita T è equidistante da S e dalla retta $S'K$, e questo fatto corrisponde alla definizione di parabola data al paragrafo 2.2. Quindi T si muove restando su una parabola, come ci eravamo proposti di dimostrare.

5.4 Conclusioni

Le quattro dimostrazioni qui sopra provano che, a seconda della posizione del punto O sul diagramma delle velocità l'orbita assume necessariamente la forma di un'ellisse, di una parabola o di uno dei due rami di un'iperbole. Abbiamo quindi provato la tesi iniziale, cioè dimostrare che tutte le orbite permesse dalle leggi di Newton sono sezioni coniche. Compito più complesso, che richiede probabilmente metodi analitici o il ricorso ad un'approssimazione numerica, è quello di determinare effettivamente l'orbita di un corpo dati posizione e velocità iniziali, così come dimostrare che effettivamente tutte le sezioni coniche aventi un fuoco nel centro attrattore corrispondono a orbite permesse (cioè il teorema inverso di quello qui proposto).

Bibliografia

- [1] Isaac Newton: *Philosophiæ Naturalis Principia mathematica*, 1687
- [2] D. L. Goodstein, J. R. Goodstein: *Il moto dei pianeti intorno al sole — Una lezione inedita di Richard Feynman*, Zanichelli 1997
- [3] C. B. Boyer: *Storia della matematica*, Mondadori 1968
- [4] C. A. Manogue, J. Janesky: *Classical mechanics of central forces* [TODO: ref?]
- [5] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri 1932

(c) 2001-2002, Federico Poloni.

Composto utilizzando L^AT_EX.

Siete liberi di leggere, utilizzare e redistribuire questo documento, così come di stamparlo o convertirlo in altri formati, ma non di modificarne il contenuto. Ogni redistribuzione del documento o di parte di esso dovrà includere questa nota di copyright.